# ADAPTATION DE LA METHODE DU GRADIENT A UN PROBLEME D'IDENTIFICATION DE DOMAINE

J. CEA, A. GIOAN, J. MICHEL
Université de NICE

## 1. POSITION DU PROBLEME

On donne un ensemble $D$ compact dans $\mathbb{R}^n$ , une famille d'ouverts réguliers dont les fonctions caractéristiques décrivent un ensemble $E$ , une application $J : E \to \mathbb{R}$ , $u \mapsto J(u)$ qui $\forall u,v \in E$ admet le développement limité suivant :

(1.1) $$J(v) = J(u) + T_1(u,v-u) + T_2(u,v)$$

(1.2) $$T_1(u,\varphi) = \int_D G(u).\ \varphi\ dx$$

(1.3) $$G(u) \in L^\infty(D) \quad , \quad ||G(u)||_{L^\infty(D)} \leq g < +\infty$$

(1.4) $$|T_2(u,v)| \leq \frac{1}{2} M\ ||v-u||^2_{L^1(D)}$$

tous les ouverts utilisés appartiendront à la famille considérée ; on se pose alors le problème suivant : déterminer $u$ tel que

(1.5) $$\begin{cases} u \in E \\ J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in E \end{cases}$$

Dans de nombreux exemples, ce problème admet au moins une solution ; une famille d'ouverts, compacte pour la topologie $L^2(D)$ , a été proposée par D. CHENAIS [3] : il s'agit d'ouverts qui vérifient une propriété uniforme de cone. Dans cette conférence, nous allons nous intéresser essentiellement au problème de l'approximation d'une solution.

Notons que ce type de problème s'apparente à la programmation non linéaire en nombres entiers en dimension infinie ou finie selon qu'on s'occupe du problème initial ou au problème discrétisé ;

l'idée d'utiliser les méthodes actuelles de programmation en nombres entiers a été rejetée par leurs auteurs devant le coût excessif de ces méthodes, dans les problèmes qui nous intéressent, pour obtenir $J(v)$ il faut commencer par résoudre deux problèmes d'équations aux dérivées partielles !

Il semble donc nécessaire d'essayer d'adapter les méthodes classiques de descente à ce genre de problème : c'est l'objet de cette conférence ; nous allons voir comment nous pouvons modifier les différents " choix " dans la méthode du type gradient afin de pouvoir l'utiliser dans le contexte actuel .

Pour bien montrer l'analogie avec le cas Hilbertien, nous allons comparer les définitions et les choix avec ceux faits dans le cas du problème " parallèle " suivant : $\hat{E}$ est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est noté $((\ ,\ ))$ ; $\hat{J} : \hat{E} \to \mathbb{R}$ , $\hat{J}$ vérifie

$$(1.6) \quad \begin{cases} \hat{J}(v) = \hat{J}(u) + \hat{T}_1(u,v-u) + \hat{T}_2(u,v) \\ \hat{T}_1(u,\varphi) = ((\hat{G}(u),\varphi)) \quad , \quad \hat{G}(u) \in \hat{E} \\ |\hat{T}_2(u,v)| \leq \frac{1}{2} M \, ||v-u||^2 \end{cases}$$

Au préalable, rappelons quelques définitions et résultats (cf J. CEA, A. GIOAN, J. MICHEL [2] ) .

DEFINITION 1.1 . -

i) $J$ atteint en $u$ un minimum local, si il existe $r > 0$ tel que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \quad , \quad ||v-u||_{L^1(D)} \leq r$$

ii) $u$ est un point critique de $J$ si il existe $r > 0$ tel que

$$(1.7) \qquad T_1(u,v-u) \geq 0 \qquad \forall v \quad , \quad ||v-u||_{L^1(D)} \leq r$$

iii) soit $\theta > 0$ ; $u$ est un point $\theta$ - critique si il existe $r(\theta) > 0$ tel que $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{r(\theta)} = 0$ et que

$$(1.8) \qquad T_1(u,v-u) \geq -\theta \quad , \quad \forall v \; , \; ||v-u||_{L^1(D)} \leq r(\theta)$$

Analogie :

ii) si $u$ vérifie

$$\hat{T}_1(u,v-u) \geq 0 \qquad \forall v \quad , \qquad ||v-u||_{\hat{E}} \leq r$$

alors, en choisissant $v - u = - r \dfrac{\hat{G}(u)}{||\hat{G}(u)||}$ , il vient $\hat{G}(u) = 0$

iii) si $u$ vérifie

$$\hat{T}_1(u,v-u) \geq - \theta \qquad \forall v \quad , \qquad ||v-u||_{\hat{E}} \leq r(\theta) \quad ,$$

en choisissant $v-u = - r(\theta) \dfrac{\hat{G}(u)}{||\hat{G}(u)||}$ il vient : $||\hat{G}(u)|| \leq \dfrac{\theta}{r(\theta)}$

et si $\theta$ est " assez petit ", $||\hat{G}(u)||$ l'est aussi ∎

Notons ceci : (1.8) et les hypothèses (1,2),...,(1.4) entraînent :

$$J(v) \geq J(u) - \theta - \frac{1}{2} Mr^2(\theta) \qquad \forall v \quad , \quad ||v-u||_{L^1(D)} \leq r(\theta)$$

On peut bien entendu supposer que $r(\theta) \to 0$ avec $\theta$ ; on peut donc écrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$(1.9) \qquad \begin{cases} J(v) \geq J(u) - r(\theta)\,\psi(\theta) \quad \forall v \ , \quad ||v-u|| \leq r(\theta) \\ \lim\limits_{\theta \to 0} \psi(\theta) = 0 \quad , \qquad \psi(\theta) > 0 \end{cases}$$

Donc (1.8) entraîne (1.9) ; réciproquement, une relation du type (1.9) entraîne une relation du type (1.8) ; on aurait donc pu définir un point $\theta$-critique à l'aide de (1.9) .

PROPOSITION 1.1 -

i) une condition nécessaire et suffisante pour que $u$ soit un point critique de $J$ est que

$$(1.10) \qquad \begin{cases} G(u)(x) \geq 0 \quad \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) = 0 \\ G(u)(x) \leq 0 \quad \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) = 1 \end{cases}$$

ii) si $J$ admet un minimum local en $u$ , alors $u$ est un point critique de $J$ .

Nous pouvons maintenant étudier la méthode du gradient qui va nous permettre de construire des points $\theta$ - critique, pour $\theta$ aussi petit qu'on le veut

## 2 . METHODE DU GRADIENT

DEFINITION 2.1 . - soient $r > 0$ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

i) $w_r - u$ est une " direction opposée au gradient " en $u$ si :

$$(2.1) \quad \begin{cases} w_r \in E \, , & \|w_r - u\|_{L^1(D)} \leq r \\ T_1(u, w_r - u) \leq T_1(u, v-u) & \forall v \in E \, , \quad \|v-u\| \leq r \end{cases}$$

ii) $w_r - u$ est une " direction non presque orthogonale au gradient " en $u$ (cf. J. CEA [1] ) si :

$$(2.2) \quad \begin{cases} w_r \in E \, , & \|w_r - u\|_{L^1(D)} \leq r \\ \frac{1}{\cos\theta} T_1(u, w_r - u) \leq T_1(u, v-u) & \forall v \in E \, , \quad \|v-u\| \leq r \end{cases}$$

Analogie :

i) si $w_r$ vérifie

$$w_r \in \hat{E} \, , \qquad \|w_r - u\|_{\hat{E}} \leq r$$

$$\hat{T}_1(u, w_r - u) \leq \hat{T}_1(u, v-u) \qquad \forall v \in \hat{E} \, , \quad \|v-u\| \leq r$$

alors $$w_r - u = - r \, . \, \frac{\hat{G}(u)}{\|\hat{G}(u)\|}$$

ii) dans ce cas $w_r$ vérifie

$$- r \|\hat{G}(u)\| \leq (\hat{G}(u), w_r - u) \leq - r \cos\theta \|\hat{G}(u)\| \, .$$

Afin d'étudier le cas où il n'existe pas $w_r$ vérifiant (2.2) , introduisons, pour $u$ fixé, les nombres $j_r$ :

$$j_r = \inf_{||v-u|| \leq r} T_1(u,v-u)$$

clairement $j_o = 0$ et $j_r$ est décroissante ; de plus, en utilisant l'hypothèse (1.3) : $||G(u)||_{L^\infty(D)} \leq g < +\infty$ , on démontre facilement le

LEMME 2.1 . -

(2.3) $$|j_r - j_s| \leq g\ |r-s| \qquad \forall r,s \geq 0$$ ▮

Soient $r > 0$ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ; si $j_r < 0$ alors

$$j_r < j_r \operatorname{Cos} \theta < 0$$

et par définition de $j_r$ , il existe $w_r$ tel que

(2.2)' $$j_r \leq T_1(u,w_r - u) \leq j_r \operatorname{Cos} \theta$$

c'est-à-dire qu'il existe $w_r$ vérifiant (2.2)

si $j_r = 0$ alors

$$0 \leq T_1(u,v-u) \qquad \forall v \in E \quad , \qquad ||v-u|| \leq r$$

et par suite $u$ est un point critique : on a donc démontré le

LEMME 2.2 . - soient $r > 0$ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Alors on a les 2 éventualités exclusives suivantes :

- $u$ est un point critique
- $j_r < 0$ et il existe $w_r$ vérifiant (2.2)

l'analogie avec le cas hilbertien est évidente. ▮

DEFINITION 2.2 . - Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ vérifiant $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{M}$ , $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ; nous dirons qu'on a fait un choix convergent de $r$ (cf. J. CEA [1] ) lorsqu'il existe $r > 0$ et $w_r$ vérifiant (2.2) et (2.4) :

(2.4) $$-\frac{r^2}{\varepsilon_1} \leq T_1(u,w_r - u) \leq -\frac{M}{2(1-\varepsilon_2)}\ r^2$$

où $M$ désigne la constante qui s'introduit dans l'hypothèse (1.4) .

Analogie . Supposons, pour simplifier, que $w_r$ vérifie (2.1) (au lieu de (2.2)) et (2.4) : dans le cas Hilbertien, on aurait :

$$(2.1)' \qquad w_r - u = - r \frac{\hat{G}(u)}{||\hat{G}(u)||} = - \rho \, \hat{G}(u)$$

et

$$- \frac{r^2}{\varepsilon_1} \leq \hat{T}(u, w_r - u) \leq - \frac{M}{2(1-\varepsilon_2)} r^2$$

ou encore

$$- \frac{\rho^2}{\varepsilon_1} ||\hat{G}(u)||^2 \leq - \rho \, ||\hat{G}(u)||^2 \leq - \frac{M}{2(1-\varepsilon_2)} \rho^2 \, ||\hat{G}(u)||^2$$

c'est-à-dire

$$(2.4)' \qquad \varepsilon_1 \leq \rho \leq \frac{2}{M} (1-\varepsilon_2)$$

ce qui correspond bien à un choix convergent de $\rho$ (cf J. CEA [1]) . ▮

Nous allons démontrer le

LEMME 2.3 . - Pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ fixés de manière que l'inégalité suivante ait lieu

$$(2.5) \qquad M\varepsilon_1 \leq 2(1-\varepsilon_2) \operatorname{Cos} \theta$$

on a les 2 possibilités suivantes :

i) $u$ est un point $\frac{Mr^2}{2(1-\varepsilon_2) \operatorname{Cos} \theta}$ - critique pour tout $r > 0$

ii) il existe un choix convergent de $r$

Démonstration . - Avec (2.2)' et (2.4) on vérifie immédiatement que l'existence d'un choix convergent de $r$ est induite par l'existence de $r$ vérifiant :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} r > 0 \\ - \dfrac{r^2}{\varepsilon_1} \leq j_r < j_r \,.\, \operatorname{Cos} \theta \leq - \dfrac{M}{2(1-\varepsilon_2)} r^2 \end{cases}$$

Puisque $j_r \geq -gr$ , $\forall r \geq 0$ , si $r \geq \tilde{r} = g\,\varepsilon_1$

on a $j_r \geq -\frac{r^2}{\varepsilon_1}$ et donc une des inégalités de (2.6) est satisfaite

$\forall r \geq \tilde{r} > 0$ .

Si il existe $r > 0$ tel que $j_r = -\frac{r^2}{\varepsilon_1}$ alors en utilisant (2.5) , on montre que

$$-\frac{r^2}{\varepsilon_1} = j_r < j_r \operatorname{Cos}\theta \leq -\frac{M}{2(1-\varepsilon_2)} r^2$$

et ce choix est convergent.

Sinon, en utilisant la continuité de $j_r$ en fonction de $r$ (cf Lemme 2.1) et le fait que $j_{\tilde{r}} > -\frac{\tilde{r}^2}{\varepsilon_1}$ , il vient : $\forall r$ $j_r > -\frac{r^2}{\varepsilon_1}$ et donc pour chaque $r$ on a exclusivement une des 3 possibilités suivantes

j) $-\frac{r^2}{\varepsilon_1} \leq -\frac{M}{2(1-\varepsilon_2)} r^2 < j_r < j_r \operatorname{Cos}\theta$

jj) $-\frac{r^2}{\varepsilon_1} < j_r \leq -\frac{M}{2(1-\varepsilon_2)} r^2 < j_r \operatorname{Cos}\theta$

jjj) $-\frac{r^2}{\varepsilon_1} < j_r < j_r \operatorname{Cos}\theta \leq -\frac{M}{2(1-\varepsilon_2)} r^2$

la $3^{\text{ième}}$ donne un choix de $r$ convergent ; si elle n'a pas lieu, alors $\forall r$ on a l'une des 2 premières possibilités ; dans les 2 cas, on a $\forall r$

$$\frac{Mr^2}{2(1-\varepsilon_2)\operatorname{Cos}\theta} \leq j_r$$

ce qui conduit au cas i) du lemme 2.3 . ∎

Soit $w_r$ , s'il existe vérifiant (2.2) et (2.4) : on a alors

$$J(w_r) \leq J(u) + T_1\,(u, w_r - u) + \frac{M}{2}\,||w_r - u||^2$$

$$J(w_r) \leq J(u) - \frac{M}{2(1-\varepsilon_2)} r^2 + \frac{M}{2} r^2$$

ou encore

(2.7) $$J(w_r) + \frac{M\,\varepsilon_2}{2(1-\varepsilon_2)} r^2 \leq J(u)$$ . ∎

Nous sommes maintenant en mesure de décrire l'algorithme du gradient :

<u>ALGORITHME 2.1</u> . -

a) On donne $u_0 \in E$

b) Supposons $u_n$ calculé, alors

α) il existe un choix $r = r_n$ convergent : on pose

$$u_{n+1} = w_{r_n}$$

β) il n'existe pas de choix convergent : l'algorithme prend fin. ∎

On va démontrer le :

<u>THEOREME 2.1</u> . - Sous les hypothèses (1.1),...,(1.4), (2.5), $- \infty < \inf_{v \in E} J(v)$, on a les 2 cas suivants :

i) l'algorithme 2.1 s'arrête pour $n = N$ ; alors $u_N$ est un point $\frac{Mr^2}{2(1-\varepsilon_2) \cos \theta}$ - critique pour tout $r \geq 0$

ii) l'algorithme 2.1 continue indéfiniment et alors $\forall n$, $u_n$ est un point $\frac{- r_n^2}{\varepsilon_1 \cos \theta}$ - critique où $r_n$ vérifie

$$\lim_{n \to + \infty} r_n = 0 \quad . \tag{2.8}$$

<u>Démonstration</u> . - Si à partir de $u_n$ on ne peut pas trouver un choix convergent de $r$, le point i) du lemme 2.3 nous donne le point i) du théorème 2.1 . Supposons maintenant qu'il existe un choix convergent de $r$ $\forall n$ : on a alors avec (2.7)

$$J(u_{n+1}) + \frac{M \varepsilon_2}{2(1-\varepsilon_2)} r_n^2 \leq J(u_n) \tag{2.9}$$

et puisque les $J(u_n)$ sont bornés inférieurement, il vient (2.8) ; mais $r_n$ étant un choix convergent de $r$, on a en particulier

$$- \frac{r_n^2}{\varepsilon_1 \cos \theta} \leq T_1(u_n, v-u_n) \quad \forall v \in E \quad , \quad ||v-u_n|| \leq r_n \quad . \tag{2.10}$$

Cela finit d'établir le point ii) du Théorème.

Remarque 2.1 . - L'introduction de $\varepsilon_1$ sert uniquement à conclure dans le cas ii) du théorème 2.1 .

## 3 . UN CAS PARTICULIER .

On donne une partition de D à l'aide de sous domaines ouverts $\Delta_i$ , $i \in J$ , tels que

$$\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \qquad \forall i,j \in J \quad , \quad i \neq j$$

$$D = \bigcup_{i \in J} \overline{\Delta}_i$$

Nous supposerons que J a un nombre fini N d'éléments .

On désigne par $\chi_i$ la fonction caractéristique de $\Delta_i$ , $i \in J$ et notre famille E est maintenant définie par

$$v \in E \iff v = \sum_{i \in I} \chi_i$$

où I est un sous ensemble quelconque de J .

Dans ce contexte, le nombre d'éléments de E étant fini,et de plus l'inégalité suivante ayant lieu

$$r_n \geq \operatorname*{Inf}_{i \in J} ||\chi_i||_{L^1(D)}$$

l'application de l'algorithme 2.1 ne peut pas conduire à la relation (2.9) pour tout $n$ , donc dans le théorème 2.1 seul le point i) aura lieu ; dans ces conditions, compte tenu de la remarque 2.1 , on pourra choisir $\varepsilon_1 = 0$ .

Nous allons limiter notre étude à la mise en oeuvre pour la recherche d'un choix convergent de r , l'algorithme étant inchangé ; nous allons retrouver ainsi un algorithme proposé par J. CEA, A. GIOAN, J. MICHEL [2] .

Pour faciliter l'exposé, nous supposerons que

$$\tau = ||\chi_i||_{L^1(D)} \quad , \quad \forall i \in J$$

Soient $u, v \in E$

$$u = \sum_{i \in I} X_i$$

$$v = \sum_{i \in K} X_i$$

En introduisant $I^- = I \cap \complement K$ , $I^+ = \complement I \cap K$ on a

$$K = (I / I^-) \cup I^+$$

Ainsi, à partir de $u$ , donc de $I$ , on peut définir un élément $v \in E$ en se donnant 2 ensembles $I^+$ et $I^-$ tels que $I^+ \subset \complement I$ , $I^- \subset I$ ; de plus

$$v - u = \sum_{i \in I^+} X_i - \sum_{i \in I^-} X_i$$

et donc

$$(3.1) \qquad ||v-u||_{L^1(D)} = \text{Card } (I^+ \cup I^-) \cdot \tau$$

Soit $u \in E$ , on a :

$$T_1(u,v-u) = \sum_{i \in I_+} \int_{\Delta_i} G(u)(x)\, dx - \sum_{i \in I_-} \int_{\Delta_i} G(u)(x)\, dx$$

et en posant

$$(3.2) \qquad t_i = \varepsilon_i \int_{\Delta_i} G(u)(x)\, dx \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{si } i \in I \\ -1 & \text{si } i \in \complement I \end{cases}$$

il vient

$$(3.3) \qquad T_1(u,v-u) = - \sum_{i \in I^+ \cup I^-} t_i \quad . \blacksquare$$

On est en mesure de présenter la recherche d'un choix convergent de $r$ : <u>commençons par définir une " direction opposée au gradient "</u> (cf. définition 2.1). Soit $r = \ell\, \tau$ et repérons $w_r$ à l'aide de $I_\ell^+$ et $I_\ell^-$ avec $\ell = \text{card } I_\ell^+ \cup I_\ell^-$ : la relation (2.1) devient, compte tenu de (3.3) :

$$
(3.4) \qquad \begin{cases}
I_\ell^+ \subset \complement I \ , \quad I_\ell^- \subset I \ , \quad \ell = \text{card } I_\ell^+ \cup I_\ell^- \\[2ex]
\displaystyle\sum_{i \in I_\ell^+ \cup I_\ell^-} t_i \geq \sum_{j \in I^+ \cup I_\ell^-} t_j \\[2ex]
\forall\, I^+, I^- \text{ tels que } I^+ \subset \complement I \ , \quad I^- \subset I \ , \quad \ell = \text{card } I^+ \cup I^-
\end{cases}
$$

la relation (3.4) nous montre ce qu'il faut faire : commençons par classer les $t_i$ :

$$t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_N} \quad .$$

Dans ces conditions (3.4) est équivalente à

$$
(3.5) \qquad \begin{cases}
I_\ell^+ \cup I_\ell^- = \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\} \\[2ex]
I_\ell^+ \subset \complement I \ , \quad I_\ell^- \subset I
\end{cases}
$$

<u>Définissons maintenant un choix convergent de $r$</u> , où ce qui revient au même de $\ell$ : la relation (2.4) devient ici, compte tenu de ce qui a été dit sur $\varepsilon_1$ :

$$
(3.6) \qquad \sum_{j=1}^{\ell} t_{i_j} \geq \frac{M\, \ell^2\, \tau^2}{2(1-\varepsilon_2)} \quad .
$$

Naturellement, plusieurs valeurs de $\ell$ pourront être des choix convergents de $\ell$ : d'après l'inégalité (2.9) qui s'écrit ici

$$J(u_{n+1}) + \frac{M\, \varepsilon_2\, \ell^2\, \tau^2}{2(1-\varepsilon_2)} \leq J(u_n)$$

il semble qu'on ait intérêt à choisir la plus grande valeur de $\ell$ pour laquelle (3.6) a lieu .

# B I B L I O G R A P H I E


[1] CEA J. - OPTIMISATION : Théorie et Algorithmes - DUNOD, PARIS 1971

[2] CEA J., GIOAN A., MICHEL J., - Quelques résultats sur l'identification de domaines - CALCOLO, 1973

[3] CHENAIS D., - On the existence of a solution in a domain identification problem, article proposé à " Journal of Mathematical Analysis and Applications "

[4] KOENIG M., ZOLESIO J.P., - Localisation d'un domaine de $\mathbb{R}^n$ ; article proposé à " Applied Mathematics & Optimization "

[5] RABOIN P., - Problème d'optimisation dans lequel la variable est une partie de la frontière - Colloque d'Analyse Numérique - LA COLLE-SUR-LOUP, France, 1973.