

APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE DOMAINE OPTIMAL

D. Bégis

I.R.I.A. 78, Rocquencourt, France

R. Glowinski

Université de PARIS VI, 75230 Cedex 05, France.

INTRODUCTION

Dans cet exposé, qui prolonge Bégis-Glowinski [1], on considère l'Analyse Numérique d'un problème de domaine optimal, assez élémentaire, relatif à un phénomène de diffusion bidimensionnel (i.e. gouverné par une équation aux dérivées partielles elliptique). La fonction d'état est approchée à l'aide d'éléments finis quadrilatéraux et le problème approché correspondant est résolu, soit par une méthode de gradient avec projection, soit par la méthode de Franck et Wolfe; ces deux méthodes nécessitent la résolution, à chaque itération, de l'équation d'état et de l'équation d'état adjointe, toutes deux approchées par la même méthode d'éléments finis. Des résultats numériques sont présentés et analysés. Pour des démonstrations complètes des résultats mentionnés dans cet exposé, on renvoie à Bégis-Glowinski [2].

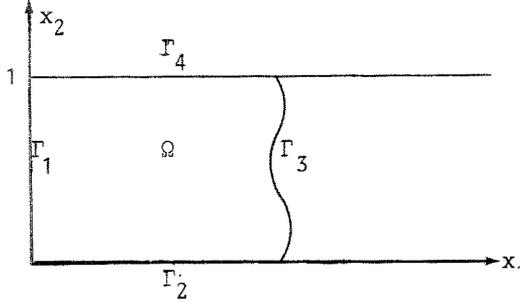
Le plan est le suivant :

1. Formulation du problème d'optimisation.
 2. Formulation variationnelle de l'équation d'état.
 3. Un théorème d'existence.
 4. Remarques sur l'unicité.
 5. Equivalence avec un problème d'identification sur un domaine fixe.
 6. Une approximation par éléments finis quadrilatéraux.
 7. Convergence des solutions approchées.
 8. Conditions nécessaires d'optimalité pour le problème continu.
 9. Conditions nécessaires d'optimalité pour le problème approché.
 10. Une méthode de gradient avec projection.
 11. Une méthode de type Franck et Wolfe.
 12. Applications.
- Conclusion.

1. FORMULATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine avec $\partial\Omega = \Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$, comme indiqué sur la figure 1.

Fig. 1



On supposera dans ce qui suit que Γ_3 est représenté par :

$$(1.1) \quad x_1 = v(x_2) \quad , \quad 0 \leq x_2 \leq 1 .$$

Etant donné deux constantes C et y_d , on considère le problème de minimisation suivant :

$$(1.2) \quad \text{Min}_{v \in u_{ad}} \int_{\Omega} |y(v) - y_d|^2 dx \quad , \quad x = (x_1, x_2)$$

avec

$$(1.3) \quad u_{ad} = \{v \mid v \text{ lipschitzienne sur } [0,1] \quad , \quad 0 < \alpha \leq v \leq \beta \quad , \\ \left| \frac{dv}{dx_2} \right| \leq C_1 \quad , \quad \int_0^1 v(x_2) dx_2 = C_2 \}$$

et $y(v)$ solution (avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$) de :

$$(1.4) \quad -\Delta y = C \text{ sur } \Omega \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4 \quad , \quad y = 0 \text{ sur } \Gamma_3 .$$

Remarque 1.1 : La condition $\int_0^1 v(x_2) dx_2 = C_2$ implique que l'aire de Ω est constante lorsque v décrit u_{ad} .

Remarque 1.2 : Pour d'autres problèmes de domaine optimal, on pourra consulter, par exemple, Lions [3], [4], Céa [5], Pironneau [6], Morice [7].

2. FORMULATION VARIATIONNELLE DE L'EQUATION D'ETAT.

Dans le but de simplifier l'étude théorique et pratique du problème ci-dessus, on va donner une formulation variationnelle de l'équation d'état (1.4). Un espace fonctionnel ⁽¹⁾ bien adapté à la présente étude est l'espace V défini de la manière suivante :

On introduit d'abord :

$$(2.1) \quad \mathcal{V} = \{ \varphi \mid \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \varphi = 0 \text{ au voisinage de } \Gamma_3 \}$$

puis

$$(2.2) \quad V = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Il en résulte que V est un sous-espace hilbertien de $H^1(\Omega)$.

On considère ensuite l'équation variationnelle :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \text{grad } y \cdot \text{grad } z \, dx = C \int_{\Omega} z \, dx & \forall z \in V \\ y \in V \end{cases}$$

La forme bilinéaire $(y, z) \rightarrow \int_{\Omega} \text{grad } y \cdot \text{grad } z \, dx$ est continue sur $V \times V$ et V-elliptique (on dit aussi coercive) i.e. $\exists \nu(\Omega) > 0$ tel que :

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} |\text{grad } z|^2 \, dx \geq \nu(\Omega) \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall z \in V ;$$

la première propriété est évidente, quant à la seconde, elle résulte du fait que Ω est borné et que $z|_{\Gamma_3} = 0 \quad \forall z \in V$ (au sens de la définition de V donnée par (2.1), (2.2)).

La forme linéaire $z \rightarrow \int_{\Omega} z \, dx$ étant continue sur V , il résulte du théorème de Lax-Milgram ⁽²⁾ que (2.3) a une solution et une seule et il est classique ⁽³⁾ que y soit l'unique solution dans V de l'équation d'état (1.4).

⁽¹⁾ De type Sobolev.

⁽²⁾ Voir, par exemple, Yosida [8] .

⁽³⁾ Voir, par exemple, Lions [9] , Necas [10] .

Remarque 2.1 : Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > \beta$ et :

$$(2.5) \quad \Omega_\gamma =]0, \gamma[\times]0, 1[$$

$$(2.6) \quad V_\gamma = \{ z \mid z \in H^1(\Omega_\gamma), z(\gamma, x_2) = 0 \text{ p.p.} \}$$

il existe ⁽⁴⁾ alors $v(\gamma)$ tel que :

$$(2.7) \quad \int_{\Omega_\gamma} |\text{grad } z|^2 dx \geq v(\gamma) \|z\|_{H^1(\Omega_\gamma)}^2 \quad \forall z \in V_\gamma$$

et, $\forall v \in u_{ad}$, V peut être considéré comme un sous-espace fermé de V_γ obtenu en prolongeant tout $z \in V$ par zéro dans $\Omega_\gamma - \Omega$. ■

On déduit facilement de la Remarque 2.1 la :

Proposition 2.1 :

On a :

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} |\text{grad } z|^2 dx \geq v(\gamma) \|z\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall z \in V, \forall v \in u_{ad}.$$

3. UN THEOREME D'EXISTENCE.

Introduisant une suite minimisante, on démontre (voir [2] pour la démonstration) le :

Théorème 3.1. Le problème d'optimisation (1.2)-(1.4) admet au moins une solution.

Ce théorème d'existence implique le :

Corollaire 3.1. Si (u_n) est une suite minimisante pour le problème (1.2)-(1.4) et si (u_m) est une sous-suite convergeant vers un élément u^* , on a, $y(u^*)$ étant la fonction d'état correspondante :

- i) u^* est une solution du problème (1.2)-(1.4).
- ii) $y(u_m) \rightarrow y(u^*)$ dans $H^1(\Omega_\gamma)$ fort.

(4) Le "meilleur" $v(\gamma)$ est $\frac{\pi^2}{\pi^2 + 4\gamma^2}$

4. REMARQUES SUR L'UNICITE.

Le problème (1.2)-(1.4) étant non convexe, il semble improbable que l'on ait unicité de la solution. Les considérations élémentaires qui suivent montreront, qu'en fait, on a en général, deux solutions :

- a) Si le domaine optimal est nonsymétrique par rapport à la droite $x_2 = 0.5$ (voir figure 2) et si Γ_3 est représenté par $u \in U_{ad}$, alors le domaine relatif à \tilde{u} définie par :

$$(4.1) \quad \tilde{u}(x_2) = u(1-x_2) \quad , \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$

est également optimal pour le problème (1.2)-(1.4).

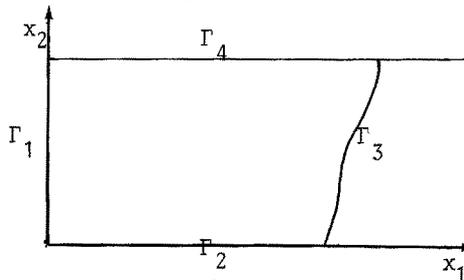


Figure 2.

- b) Si le domaine optimal est symétrique par rapport à la droite $x_2 = 0.5$ (voir figure 3), il résulte des propriétés de symétrie et régularité de $y(u)$ (qui impliquent que la dérivée normale de $y(u)$ est nulle sur la droite $x_2 = 0.5$), que \tilde{u} définie par :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \tilde{u}(x_2) = u(\frac{1}{2} - x_2) & \text{si } 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{u}(x_2) = \tilde{u}(1 - x_2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$

est également optimale pour le problème (1.2)-(1.4) ; on a représenté sur la figure 4 le domaine correspondant à \tilde{u} .

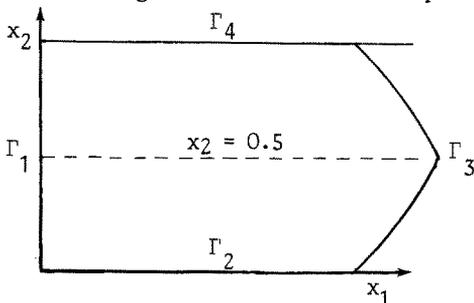


Figure 3

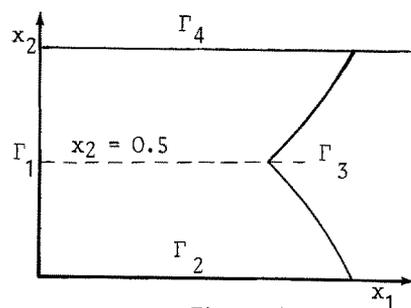


Figure 4.

5. EQUIVALENCE AVEC UN PROBLEME D'IDENTIFICATION SUR UN DOMAINE FIXE.

Soit $\hat{\Omega} =]0,1[\times]0,1[$ et \hat{V} l'espace fonctionnel défini par :

$$(5.1) \quad \hat{V} = \{ \hat{y} | \hat{y} \in H^1(\hat{\Omega}), \hat{y}(1, \hat{x}_2) = 0 \quad \text{p.p.} \} .$$

On peut associer à la bijection de $\Omega \rightarrow \hat{\Omega}$ définie par :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \hat{x}_1 = \frac{x_1}{v(x_2)} \\ \hat{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

l'isomorphisme défini par :

$$(5.3) \quad \begin{cases} y \rightarrow \hat{y} : V \rightarrow \hat{V} \\ \hat{y}(\hat{x}) = y(\hat{x}_1 v(\hat{x}_2), \hat{x}_2) . \end{cases}$$

Proposition 5.1. :

On a $\forall y \in V$

$$(5.4) \quad \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\beta(1+\beta^2+C_1^2)} \int_{\Omega} |\text{grad } y|^2 dx \leq \int_{\hat{\Omega}} |\text{grad } \hat{y}|^2 d\hat{x} \leq \frac{1+\beta^2+C_1^2}{\alpha} \int_{\Omega} |\text{grad } y|^2 dx , \\ \forall v \in U_{ad} . \end{cases}$$

Démonstration : voir [2]. ■

Dans ce qui suit, on utilisera sur \hat{V} la norme définie par :

$$y \rightarrow \left(\int_{\hat{\Omega}} |\text{grad } \hat{y}|^2 d\hat{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \|\hat{y}\|$$

qui est équivalente sur \hat{V} à la norme induite par $H^1(\hat{\Omega})$. ■

Utilisant les résultats ci-dessus, on peut transformer le problème (1.2)-(1.4) en un problème d'optimisation relatif au domaine $\hat{\Omega}$, soit :

$$(5.5) \quad \text{Min}_{v \in U_{ad}} \int_{\hat{\Omega}} v |\hat{y}(v) - y_d|^2 d\hat{x}$$

avec u_{ad} défini par (1.3) et $\hat{y}(v)$ solution de l'équation d'état, définie sous forme variationnelle par :

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\Omega}} \hat{J}^t \text{grad } \hat{y} \cdot \hat{J}^t \text{grad } \hat{z} \, v d\hat{x} = C \int_{\hat{\Omega}} v \hat{z} \, d\hat{x} \quad \forall \hat{z} \in \hat{V} \\ \hat{y} \in \hat{V} ; \end{array} \right.$$

dans (5.6), la matrice jacobienne \hat{J} est donnée par :

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\hat{x}_1 \frac{v'}{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que l'on peut expliciter (5.6) par :

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\Omega}} \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{x}_1} + \left(\hat{x}_1 \frac{v'}{v} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}_2} \right) \left(\hat{x}_1 \frac{v'}{v} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{x}_2} \right) \right] v d\hat{x} = C \int_{\hat{\Omega}} v \hat{z} \, d\hat{x} \\ \forall \hat{z} \in \hat{V} \\ \hat{y} \in \hat{V} . \end{array} \right.$$

Dans la suite, on notera $(\hat{y}, \hat{z}) \rightarrow a(v; \hat{y}, \hat{z})$ la forme bilinéaire, symétrique définie par le premier membre de (5.7); de la Proposition 5.1., on déduit la

Proposition 5.2 : On a :

$$(5.8) \quad a(v; \hat{z}, \hat{z}) \geq \frac{\alpha}{1 + \beta^2 + C_1^2} \|\hat{z}\|^2 \quad \forall \hat{z} \in \hat{V} \quad , \quad \forall v \in u_{ad}$$

$$(5.9) \quad |a(v; \hat{y}, \hat{z})| \leq \frac{\beta(1 + \beta^2 + C_1^2)}{\alpha^2} \|\hat{y}\| \|\hat{z}\| \quad \forall \hat{y}, \hat{z} \in \hat{V} \quad , \quad \forall v \in u_{ad} .$$

Remarque 5.1 :

Le problème (5.5)(5.6) est un problème d'identification dans lequel la fonction inconnue (ici u) intervient dans les coefficients d'un opérateur elliptique ; de tels problèmes sont étudiés dans CHAVENT [17], mais à la différence de [11] une dérivée de la fonction inconnue apparaît dans les coefficients de l'opérateur elliptique associé à (5.6), (5.7).

Remarque 5.2. :

Le problème (5.5), (5.6) étant équivalent au problème (1.2)-(1.4) admet au moins une solution mais la démonstration directe d'un tel résultat semble difficile.

Remarque 5.3. :

La fonction v étant donnée, on peut expliciter (5.7) sous la forme d'une équation aux dérivées partielles elliptique avec des conditions aux limites assez compliquées ; à ce point de vue la formulation variationnelle (5.7) est très commode, ces conditions aux limites n'y intervenant pas explicitement.

Remarque 5.4.:

Soit y_d et $f \in L^2(\hat{\Omega})$; une généralisation très naturelle du problème (5.5), (5.6) est

$$(5.10) \quad \text{Min}_{v \in u_{ad}} \int_{\hat{\Omega}} v |\hat{y}(v) - y_d|^2 dx$$

avec $\hat{y}(v)$ solution de :

$$(5.11) \quad \begin{cases} a(v; \hat{y}, \hat{z}) = \int_{\hat{\Omega}} f v \hat{z} dx & \forall \hat{z} \in \hat{V} \\ \hat{y} \in \hat{V} . \end{cases}$$

6. UNE APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS QUADRILATERAUX.

D'un point de vue pratique, il est nécessaire d'approcher le problème (1.2)-(1.4) par un problème en dimension finie ; on utilisera dans ce but une approximation de l'équation d'état par éléments finis quadrilatéraux.

6.1. APPROXIMATION DE u_{ad} .

Soit N un entier positif et $h = \frac{1}{N}$; on note par e_j , $j = 1, \dots, N$, l'intervalle $[(j-1)h, jh]$ et on approche u_{ad} par :

$$(6.1) \quad u_{ad}^h = \{v_h \mid v_h \in u_{ad}, v_h|_{e_j} \in P_1, \forall j=1, \dots, N\}$$

avec $P_1 = 1$ 'espace des polynômes d'une variable de degré ≤ 1 .

Le domaine Ω (resp. l'espace V) relatif à v_h sera noté Ω_h (resp. V_h).

6.2. APPROXIMATION DE L'EQUATION D'ETAT.

On définit :

$$(6.2) \quad \hat{K}_{ij} = [(i-1)h, ih] \times [(j-1)h, jh]$$

$$(6.3) \quad \hat{\mathcal{K}}_h = \{ \hat{K}_{ij} \}_{1 \leq i, j \leq N}$$

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_h : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_h, F_h = (F_{1h}, F_{2h}) \\ F_{1h}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1 v_h(\hat{x}_2) \\ F_{2h}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2 \end{array} \right.$$

$$(6.5) \quad K_{ij} = F_h(\hat{K}_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

$$(6.6) \quad \mathcal{K}_h = \{ K_{ij} \}_{1 \leq i, j \leq N} = F_h(\hat{\mathcal{K}}_h).$$

La fonction v_h étant affine par morceaux, on remarque que chaque K_{ij} est un quadrilatère, plus précisément un trapèze, (voir figure 5) et que :

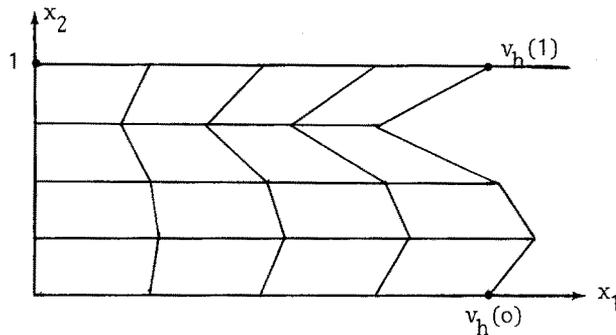


Figure 5

$$(6.7) \quad F_h |_{\hat{K}_{ij}} \in Q_1 \times Q_1$$

avec $Q_1 = 1$ 'espace des polynômes de degré ≤ 1 par rapport à chaque variable (5).

L'espace W_h de dimension finie approchant V_h est défini par :

$$(6.8) \quad W_h = \{ z_h \mid z_h \in V_h \cap C^0(\bar{\Omega}_h), z_h \circ F_h|_{\hat{K}_{ij}} \in Q_1, 1 \leq i, j \leq N \}.$$

Il résulte de (6.7)(6.8) que les éléments finis que l'on utilise pour approcher V_h sont de type isoparamétrique (voir, par exemple, CIARLET-RAVIART. [12], CIARLET [13] pour une étude générale de ce type d'éléments finis).

Remarque 6.1.

Chaque $z_h \in W_h$ est complètement déterminée par les valeurs qu'elle prend aux sommets des K_{ij} ; ces valeurs sont des degrés de liberté naturels pour l'approximation considérée. ■

Cette approximation de V_h étant donnée, une approximation tout à fait naturelle de l'équation d'état semble être :

$$(6.9) \quad \begin{cases} \int_{\Omega_h} \text{grad } y_h \cdot \text{grad } z_h \, dx = C \int_{\Omega_h} z_h \, dx & \forall z_h \in W_h \\ y_h \in W_h \end{cases}$$

L'équation variationnelle (6.9) est équivalente à un système linéaire, les variables inconnues étant les valeurs prises par y_h aux sommets des quadrilatères de W_h : en fait (6.9) n'est pas très bien adaptée à des calculs numériques effectifs; pour surmonter cette difficulté, on va utiliser l'application F_h pour obtenir une formulation équivalente où les intégrales sont sur $\hat{\Omega}$ ($\hat{\Omega}$ doit être considéré comme un domaine de référence).

On définit :

$$(6.10) \quad \hat{W}_h = \{ \hat{z}_h \mid \hat{z}_h \in \hat{V} \cap C^0(\bar{\hat{\Omega}}), \hat{z}_h|_{\hat{K}_{ij}} \in Q_1 \}$$

et, y_h étant la solution de (6.9),

$$(6.11) \quad \hat{y}_h = y_h \circ F_h$$

alors \hat{y}_h est solution de :

(5) $p \in Q_1 \iff p(\xi_1, \xi_2) = a_{00} + a_{10} \xi_1 + a_{01} \xi_2 + a_{11} \xi_1 \xi_2$

$$(6.12) \quad \begin{cases} a(v_h; \hat{y}_h, \hat{z}_h) = C \int_{\hat{\Omega}} v_h \hat{z}_h \, d\hat{x} & \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h \\ \hat{y}_h \in \hat{W}_h. \end{cases}$$

La première équation (6.12) peut être explicitée par :

$$(6.13) \quad \begin{cases} \sum_{1 \leq i, j \leq N} \int_{\hat{K}_{ij}} \left[\frac{1}{v_h} \frac{\partial \hat{y}_h}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{z}_h}{\partial \hat{x}_1} + (\hat{x}_1 \frac{v'_h}{v_h} \frac{\partial \hat{y}_h}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial \hat{y}_h}{\partial \hat{x}_2}) (\hat{x}_1 \frac{v'_h}{v_h} \frac{\partial \hat{z}_h}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial \hat{z}_h}{\partial \hat{x}_2}) \right] v_h \, d\hat{x} \\ = C \sum_{1 \leq i, j \leq N} \int_{\hat{K}_{ij}} v_h \hat{z}_h \, d\hat{x} & \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h. \end{cases}$$

Afin de simplifier les intégrations à effectuer sur chaque \hat{K}_{ij} pour expliciter le système linéaire équivalent à (6.12), on approche, sur $\hat{W}_h \times \hat{W}_h$, la forme bilinéaire $a(v_h; \dots)$ par :

$$(6.14) \quad \begin{cases} a_h(v_h; \hat{y}_h, \hat{z}_h) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \int_{\hat{K}_{ij}} \left[\frac{1}{v_h^2(\xi_j)} \frac{\partial \hat{y}_h}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{z}_h}{\partial \hat{x}_1} + (\xi_i \frac{v'_h}{v_h(\xi_j)} \frac{\partial \hat{y}_h}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial \hat{y}_h}{\partial \hat{x}_2}) (\xi_i \frac{v'_h}{v_h(\xi_j)} \frac{\partial \hat{z}_h}{\partial \hat{x}_1} \right. \\ \left. - \frac{\partial \hat{z}_h}{\partial \hat{x}_2}) \right] v_h(\xi_j) \, d\hat{x} \end{cases}$$

avec :

$$(6.15) \quad \xi_i = (i - \frac{1}{2})h, \quad \xi_j = (j - \frac{1}{2})h.$$

En ce qui concerne les propriétés de $a_h(v_h; \dots)$, un calcul élémentaire de valeurs propres permet de démontrer la :

Proposition 6.1.

On a :

$$(6.16) \quad \begin{cases} a_h(v_h; \hat{z}_h, \hat{z}_h) \geq \frac{\alpha}{1 + \beta^2 + C_1^2} \|\hat{z}_h\|^2 \\ \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h, \forall v_h \in u_{ad}^h, \forall h \end{cases}$$

i.e. l'ellipticité uniforme, et

$$(6.17) \quad \begin{cases} |a_h(v_h; \hat{y}_h, \hat{z}_h)| \leq \frac{1+\beta^2+C_f^2}{\alpha} \|\hat{y}_h\| \|\hat{z}_h\| \\ \forall \hat{y}_h, \hat{z}_h \in \hat{W}_h, \quad \forall v_h \in u_{ad}^h, \quad \forall h \end{cases}$$

i.e. la continuité uniforme. ■

On peut intégrer exactement, et sans difficulté, le terme $\int_{\hat{\Omega}} v_h \hat{z}_h d\hat{x}$, mais, en fait, on a, là également, utilisé une approximation, soit :

$$(6.18) \quad L_h(v_h; \hat{z}_h) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_h(\xi_j) \int_{\hat{K}_{ij}} \hat{z}_h d\hat{x}.$$

Compte tenu de ce qui précède, on prendra pour équation d'état approchée :

$$(6.19) \quad \begin{cases} a_h(v_h; \hat{y}_h, \hat{z}_h) = C L_h(v_h; \hat{z}_h) \quad \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h \\ \hat{y}_h \in \hat{W}_h. \end{cases}$$

Il résulte de la Proposition 6.1 que (6.19) admet une solution et une seule.

6.3. APPROXIMATION DE LA FONCTION CÔUT.

L'approximation la plus naturelle de la fonction coût est donnée par :

$$(6.20) \quad \int_{\Omega_h} |y_h - y_d|^2 dx$$

avec

$$(6.21) \quad \int_{\Omega_h} |y_h - y_d|^2 dx = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \int_{\hat{K}_{ij}} v_h |y_h - y_d|^2 d\hat{x}$$

mais pour les raisons mentionnées au N° 6.2, au lieu de (6.20) on utilisera l'approximation définie par :

$$(6.22) \quad \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 |\hat{y}_h(\hat{p}_{ij}^k) - y_d|^2$$

les \hat{p}_{ij}^k étant les sommets de \hat{K}_{ij} comme indiqué sur la Figure 6 :

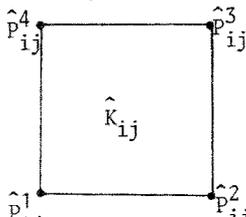


Figure 6

6.4. DEFINITION DU PROBLEME APPROCHE.

Compte tenu de ce qui précède, le problème approché sera défini par :

$$(6.23) \quad \min_{v_h \in u_{ad}} \left\{ \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq j \leq N} v_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 |\hat{y}_h(\hat{P}_{ij}^k) - y_d|^2 \right\}$$

avec, dans (6.23), \hat{y}_h solution de l'équation d'état :

$$(6.24) \quad \begin{cases} a_h(v_h; \hat{y}_h, \hat{z}_h) = C L_h(v_h; \hat{z}_h) & \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h \\ \hat{y}_h \in \hat{W}_h \end{cases} .$$

Remarque 6.1.

Le problème approché peut s'obtenir en discrétisant directement le problème d'identification équivalent (5.5), (5.6), mais, pour démontrer la convergence des solutions approchées vers une solution du problème continu, il semble qu'il soit essentiel de considérer (6.23), (6.24) comme une approximation du problème (1.2)-(1.4), par l'intermédiaire de l'approximation par éléments finis quadrilatéraux définie au N° 6.2.

6.5. RESULTATS D'EXISTENCE POUR LE PROBLEME APPROCHE.

Des arguments élémentaires de compacité, en dimension finie, permettent de démontrer le :

Théorème 6.1.

Le problème approché (6.23), (6.24) admet au moins une solution.

7. CONVERGENCE DES SOLUTIONS APPROCHEES.

Soit u_h une solution du problème approché (6.23), (6.24) ; on démontre dans [2] que les limites des sous-suites convergentes de $(u_h)_h$ sont solutions du problème (1.2)-(1.4). Ici, on se contentera d'indiquer - toujours sans démonstration - un théorème de convergence et deux lemmes utiles à sa démonstration.

Lemme 7.1.

$\forall v \in u_{ad}$, il existe $(r_h v)_h$ tel que :

- i) $r_h v \in u_{ad}^h \quad \forall h$,
 ii) $\lim_{h \rightarrow 0} r_h v = v$ dans $L^\infty(0,1)$ fort (uniformément) .

Indications :

On peut, par exemple, définir $r_h v$ par :

$$(7.1) \quad r_h v \in C^0[0,1] \quad , \quad r_h v|_{e_j} \in P_1 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_h v(jh) = \frac{1}{h} \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} v(\tau) d\tau \quad , \quad j = 1, \dots, N-1 \\ r_h v(0) = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} v(\tau) d\tau \quad , \quad r_h v(1) = \frac{2}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^1 v(\tau) d\tau . \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Dans le lemme qui suit, on utilise le formalisme de CIARLET-RAVIART [12, No.6]; étant donné $v_h \in u_{ad}^h$ on a défini au N°6.2 une partition \mathcal{K}_h , de Ω_h , relative à v_h ; on a alors le :

Lemme 7.2.

La famille $(\mathcal{K}_h)_h$ est une famille régulière, uniformément en v_h .

Commentaires :

Cela implique qu'à la limite aucun des quadrilatères ne peut dégénérer en triangle et qu'aucun angle ne peut tendre vers 0 ou π ; de façon plus précise, avec les notations de la Figure 7, on a ⁽⁶⁾ :

⁽⁶⁾ Dans (7.3) les indices sont à prendre modulo 4.

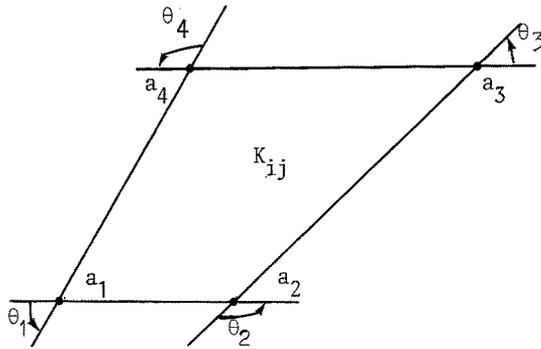


Figure 7.

$$(7.3) \quad \begin{cases} h \min(1, \alpha) \leq |a_k a_{k+1}| \leq h \max(\sqrt{1+C_1^2}, \beta) \\ \forall k = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

et

$$(7.4) \quad \frac{1}{\sqrt{1+C_1^2}} \leq |\sin \theta_k| \leq 1 \quad \forall k=1,2,3,4, \quad \forall v_h \in u_{ad}^h, \quad \forall h. \quad \blacksquare$$

LEMME 7.3.

Soit $v_h \in u_{ad}^h$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} v_h = v$ fortement dans $L^\infty(0,1)$, soit \hat{y}_h la solution correspondante de l'équation d'état (6.19) et $y_h = \hat{y}_h \circ F_h^{-1}$, soit Ω le domaine relatif à v et $y(v)$ la solution correspondante de l'équation d'état (1.4) ; alors

$$\begin{cases} \text{i)} & \lim_{h \rightarrow 0} y_h = y(v) \text{ fortement dans } H^1(\Omega \gamma) \\ \text{ii)} & \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 |\hat{y}_h(\hat{P}_{ij}^k) - y_d|^2 \right\} \right\} = \\ & = \int_{\Omega} |y(v) - y_d|^2 dx. \end{cases}$$

Commentaires :

Sans entrer dans les détails de la démonstration de ce Lemme pour laquelle on renvoie à [2], disons qu'une étape essentielle est la suivante :

V étant l'espace associé à Ω (et v) par (2.1), on considère $\varphi \in V$; on a alors, pour h suffisamment petit :

$$(7.5) \quad \text{support de } \varphi \subset \Omega_h .$$

Soit φ_h le W_h -interpolé de φ sur \mathcal{K}_h i.e. l'unique fonction telle que :

$$(7.6) \quad \begin{cases} \varphi_h \in W_h \\ \varphi_h(P) = \varphi(P) \quad \forall P, P \text{ sommet de } K_{ij} \in \mathcal{K}_h, 1 \leq i, j \leq N; \end{cases}$$

Compte tenu du Lemme 7.2 sur la régularité de $(\mathcal{K}_h)_h$, on peut alors appliquer [12, N°6] d'où l'existence de Λ , indépendant de h , φ , v_h , tel que :

$$(7.7) \quad \begin{cases} \|\varphi_h - \varphi\|_{H^1(\Omega_h)} = \|\varphi_h - \varphi\|_{H^1(\Omega\gamma)} \leq h^\Lambda \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \\ \forall h, \forall v_h, \forall \varphi \in V . \end{cases} \quad \blacksquare$$

Des Lemmes 7.1 et 7.3, on déduit le :

THEOREME 7.1 :

Soit u_h une solution du problème approché (6.23), (6.24), \hat{y}_h la solution correspondante de l'équation d'état (6.19) et $y_h = \hat{y}_h \circ F_h^{-1}$; lorsque $h \rightarrow 0$ on peut extraire de la suite $(u_h)_h$ une sous-suite - encore notée $(u_h)_h$ - telle que :

$$(7.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \{u_h, y_h\} = \{u, y(u)\} \text{ dans } L^\infty(0,1) \times H^1(\Omega\gamma) \text{ fort}$$

$$(7.9) \quad u \text{ solution de (1.2)-(1.4)}$$

et toutes les sous-suites convergentes extraites de $(u_h)_h$ possèdent ces propriétés.

Ce théorème justifie donc la méthode utilisée pour approcher le problème (1.2)-(1.4). ■

8. CONDITIONS NECESSAIRES D'OPTIMALITE POUR LE PROBLEME CONTINU.

Les méthodes d'optimisation du problème approché, décrites aux Numéros 10 et 11, sont des méthodes itératives qui nécessitent, à chaque itération, le calcul du gradient de la fonction coût considérée comme fonction de v_h . Le formalisme du problème continu étant plus simple que celui du problème approché, on va d'abord étudier le gradient de la fonction coût attachée au problème d'identification équivalent du N°5, dans le cadre un peu plus général défini par la Remarque 5.4.

La connaissance du gradient permettra, entre autres, d'explicitier des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème considéré.

8.1. UN LEMME DE DIFFERENTIABILITE.

Soit u l'espace des fonctions lipschitziennes ⁽⁷⁾ sur $[0,1]$ et \mathcal{O} l'ouvert de u défini par :

$$(8.1) \quad \mathcal{O} = \{v \mid v \in u, v(x_2) > 0 \text{ sur } [0,1]\},$$

soit $\hat{y}(v)$ la solution de l'équation

$$(8.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(v; \hat{y}, \hat{z}) = \int_{\hat{\Omega}} f v \hat{z} \, d\hat{x} \\ \hat{y} \in \hat{V} \end{array} \right. \quad \forall z \in \hat{V}$$

on a alors le :

LEMME 8.1. :

L'application $v \rightarrow \hat{y}(v)$ est Fréchet-différentiable de $\mathcal{O} \rightarrow \hat{V}$.

Commentaires :

Pour démontrer ce résultat, on peut, comme dans [11, Ch. I] appliquer le théorème des fonctions implicites en utilisant la différentiabilité-Fréchet des applications $\mathcal{O} \rightarrow L^\infty(0,1)$ définies par $v \rightarrow v'$, $v \rightarrow \frac{1}{v}$, etc... . ■

⁽⁷⁾ $u = W^{1,\infty}(0,1)$.

8.2. GRADIENT DE LA FONCTION COUT ET CONDITIONS NECESSAIRES D'OPTIMALITE.

Soit $J : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction coût du problème (5.10), (5.11); d'où :

$$(8.3) \quad J(v) = \int_{\hat{\Omega}} v |\hat{y}(v) - y_d|^2 d\hat{x} ;$$

Du Lemme 8.1 on déduit alors le :

THEOREME 8.1.

La fonction coût J est Fréchet-différentiable de $\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et son gradient J' en u est défini par ⁽⁸⁾:

$$(8.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} J'(u) \cdot w &= \int_0^1 w(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} |\hat{y}(u) - y_d|^2 + \hat{p} + \frac{1}{u^2} (1 + \hat{x}_1^2 u'^2) \frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_2} \right\} d\hat{x}_1 + \\ &+ \int_0^1 w'(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_1} \right) - 2\hat{x}_1 \frac{u'}{u} \frac{\partial \hat{y}(u)}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 \end{aligned} \right.$$

où \hat{p} est la solution (unique) de l'équation adjointe :

$$(8.5) \quad \begin{cases} a(u; \hat{p}, \hat{z}) = \int_{\hat{\Omega}} u (\hat{y}(u) - y_d) \hat{z} d\hat{x} \quad \forall \hat{z} \in \hat{V} \\ \hat{p} \in \hat{V} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Ce théorème implique le :

THEOREME 8.2.

Si $u \in u_{ad}$ est solution du problème (5.10), (5.11), u doit vérifier :

$$(8.6) \quad \begin{cases} J'(u) \cdot (v - u) \geq 0 \quad \forall v \in u_{ad} \\ u \in u_{ad} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Les relations (8.6) ne sont rien d'autre que les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (5.10), (5.11). \blacksquare

⁽⁸⁾ $J'(u) \in \mathcal{L}(u, \mathbb{R})$.

9. CONDITIONS NECESSAIRES D'OPTIMALITE POUR LE PROBLEME APPROCHE.

On va reprendre, succinctement, dans le cas du problème approché, les considérations développées au N° 8 pour le problème (5.10), (5.11) ; dans le cas, le plus fréquent, où y_d , f seraient continues sur $\bar{\Omega}$ une approximation "raisonnable" de ce dernier problème serait :

$$(9.1) \quad \text{Min}_{v_h \in u_{ad}} \left\{ \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 \left| \hat{y}_h(\hat{P}_{ij}^k) - y_d(\hat{P}_{ij}^k) \right|^2 \right\}$$

avec, dans (9.1), \hat{y}_h solution de l'équation d'état :

$$(9.2) \quad \begin{cases} a_h(v_h; \hat{y}_h, \hat{z}_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 f(\hat{P}_{ij}^k) \hat{z}_h(\hat{P}_{ij}^k) \quad \forall z_h \in \hat{W}_h \\ \hat{y}_h \in \hat{W}_h. \end{cases}$$

Remarque 9.1.

Au cas où y_d (resp. f) ne serait pas continue, on remplacerait $y_d(\hat{P}_{ij}^k)$ (resp. $f(\hat{P}_{ij}^k)$) par la moyenne de y_d (resp. f) sur l'intersection de Ω et du carré centré en \hat{P}_{ij}^k , de côtés de longueur h et parallèles aux axes de coordonnées. ■

Soit $u_h = \{ v_h \mid v_h \in u, v_h|_{e_j} \in P_1, j=1, \dots, N \}$, on munit u_h de la structure euclidienne définie par le produit scalaire

$$(9.3) \quad (u_h, v_h) = \int_{\Omega} u_h v_h \, dx_2$$

et la norme associée ; soit $\mathcal{O}_h = u_h \cap \mathcal{O}$, \mathcal{O}_h est alors un ouvert de u_h .

On définit ensuite un Hamiltonien du problème (9.1), (9.2), soit $H_h : u_h \times \hat{W}_h \times \hat{W}_h \rightarrow \mathbb{R}$, par (9) :

$$(9.4) \quad \begin{cases} H_h(v_h, \hat{z}_h, \hat{q}_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 \left| \hat{z}_h(\hat{P}_{ij}^k) - y_d(\hat{P}_{ij}^k) \right|^2 - \\ - 2[a_h(v_h; \hat{z}_h, \hat{q}_h) - \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} v_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 f(\hat{P}_{ij}^k) \hat{q}_h(\hat{P}_{ij}^k)]. \end{cases}$$

Soit $J_h : \mathcal{O}_h \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction coût du problème (9.1), (9.2), on démontre alors le :

(9) Toujours en supposant $y_d, f \in C^0(\bar{\Omega})$.

THEOREME 9.1. :

La fonction coût J_h est Fréchet-différentiable de $\mathcal{O}_h \rightarrow \mathbb{R}$ et son gradient J'_h au point u_h est défini par :

$$(9.5) \quad J'_h(u_h) \cdot w_h = \int_0^1 \frac{\partial H_h}{\partial v_h}(u_h, \hat{y}_h, \hat{p}_h) w_h \, dx_2, \quad \forall w_h \in U_h$$

où dans (9.5) $\frac{\partial H_h}{\partial v_h}(u_h, \hat{y}_h, \hat{p}_h) \in U_h$ et désigne le gradient partiel de H_h , par rapport à v_h , au point $(u_h, \hat{y}_h, \hat{p}_h)$ et où \hat{y}_h, \hat{p}_h sont, respectivement, solutions de l'équation d'état :

$$(9.6) \quad \begin{cases} a_h(u_h, \hat{y}_h, \hat{z}_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 f(\hat{p}_{ij}^k) \hat{z}_h(\hat{p}_{ij}^k), & \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h \\ \hat{y}_h \in \hat{W}_h \end{cases}$$

et de l'équation adjointe :

$$(9.7) \quad \begin{cases} a_h(u_h, \hat{p}_h, \hat{z}_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_h(\xi_j) \sum_{k=1}^4 (\hat{y}_h(\hat{p}_{ij}^k) - y_d(\hat{p}_{ij}^k)) \hat{z}_h(\hat{p}_{ij}^k) \\ \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h, \hat{p}_h \in \hat{W}_h. \end{cases}$$

De ce théorème, on déduit le :

THEOREME 9.2 :

Si $u_h \in U_{ad}^h$ est solution du problème (9.1), (9.2), u_h doit vérifier

$$(9.8) \quad \begin{cases} J'_h(u_h) \cdot (v_h - u_h) \geq 0 & \forall v_h \in U_{ad}^h \\ u_h \in U_{ad}^h \end{cases}$$

Les relations (9.8) sont les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (9.1), (9.2). ■

Remarque 9.2 :

Il convient de remarquer que dans le calcul du gradient $J'_h(u_h)$, \hat{y}_h et \hat{p}_h sont solutions de systèmes linéaires ne différant que par les seconds membres, les matrices associées aux premiers membres étant identiques ; on verra comment tirer parti de cette Remarque aux Numéros 10 et 11. ■

10. UNE METHODE DE GRADIENT AVEC PROJECTION.

On peut, pour résoudre (ou du moins essayer de résoudre) (9.1),(9.2), utiliser une méthode de gradient avec projection.

10.1 DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DU GRADIENT AVEC PROJECTION.

Le gradient en v_h de la fonction coût, soit $J_h(v_h)$, étant identifié à un élément de u_h , l'algorithme du gradient avec projection peut être explicité par :

$$(10.1) \quad u_h^0 \text{ donné dans } u_{ad}^h$$

u_h^n étant connu, on calcule \hat{y}_h^{n+1} , \hat{p}_h^{n+1} , u_h^{n+1} par :

$$(10.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_h(u_h^n; \hat{y}_h^{n+1}, \hat{z}_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_h^n(\xi_j) \sum_{k=1}^4 f(\hat{p}_{ij}^k) \hat{z}_h(\hat{p}_{ij}^k), \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h \\ \hat{y}_h^{n+1} \in \hat{W}_h \end{array} \right.$$

$$(10.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_h(u_h^n; \hat{p}_h^{n+1}, \hat{z}_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_h^n(\xi_j) \sum_{k=1}^4 (\hat{y}_h^{n+1}(\hat{p}_{ij}^k) - y_d(\hat{p}_{ij}^k)) \hat{z}_h(\hat{p}_{ij}^k), \\ \forall \hat{z}_h \in \hat{W}_h, \quad \hat{p}_h^{n+1} \in \hat{W}_h \end{array} \right.$$

$$(10.4) \quad u_h^{n+1} = P_{u_{ad}^h} (u_h^n - \rho J_h'(u_h^n)) \quad , \quad \rho > 0 \quad . \quad \blacksquare$$

Dans (10.4), $P_{u_{ad}^h}$ est l'opérateur de projection sur u_{ad}^h pour la norme définie par (9.3) ; par ailleurs $J_h'(u_h^n) = \frac{\partial J_h}{\partial v_h} (u_h^n, \hat{y}_h^{n+1}, \hat{p}_h^{n+1})$.

Remarque 10.1.

La matrice associée aux systèmes linéaires (10.2),(10.3) est symétrique et définie positive, aussi a-t-on utilisé la méthode de Cholesky pour résoudre ces systèmes, en prenant avantage du fait que la factorisation de Cholesky n'est à effectuer qu'une seule fois par itération puisque les deux systèmes linéaires (10.2),(10.3) ont des matrices identiques. ■

Remarque 10.2 :

Etant donné la non-convexité du problème (9.1),(9.2), il semble que la démonstration de résultats de convergence pour l'algorithme (10.1)-(10.4) soit hors d'atteinte. ■

10.2. UNE METHODE DE PROJECTION SUR u_{ad}^h .

La mise en oeuvre de l'algorithme (10.1)-(10.4) implique à chaque itération la projection du vecteur $u_h^n - \rho J_h^n(u_h^n)$ sur u_{ad}^h ; plus généralement, si $b \in u_h$, projeter b sur u_{ad}^h revient à résoudre le problème :

$$(10.5) \quad \text{Min}_{v_h \in u_{ad}^h} [(v_h, v_h) - 2(b, v_h)]$$

qui admet évidemment une solution et une seule.

Compte tenu de la nature des contraintes définissant u_{ad}^h un Lagrangien bien adapté au problème (10.5) sera $\mathcal{L}_h : u_h \times \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$(10.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = (v_h, v_h) - 2(b, v_h) + 2\mu_0 \left(\int_0^1 v_h(\xi) d\xi - C_2 \right) + h \sum_{j=1}^N \mu_j \left(\frac{v_j - v_{j-1}}{h} - C_1 \right) \\ + h \sum_{j=1}^N \mu_{N+j} \left(\frac{v_{j-1} - v_j}{h} - C_1 \right) \end{array} \right.$$

avec, dans (10.6), $v_j = v_h(jh)$.

Notant $u_{\alpha\beta}^h = \{v_h \mid v_h \in u_h, \alpha \leq v_h \leq \beta\}$, on peut alors calculer la solution de (10.5) en utilisant l'algorithme suivant :

$$(10.7) \quad \lambda_h^o \text{ donné}$$

λ_h^m connu, on calcule $u_h^m \in u_{\alpha\beta}^h$ et $\lambda_h^{m+1} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{2N}$ par :

$$(10.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_h(u_h^m, \lambda_h^m) \leq \mathcal{L}_h(v_h, \lambda_h^m) \quad \forall v_h \in u_{\alpha\beta}^h \\ u_h^m \in u_{\alpha\beta}^h \end{array} \right.$$

$$(10.9) \quad \lambda_0^{m+1} = \lambda_0^m + \rho' \left(\int_0^1 u_h^m(\xi) d\xi - C_2 \right)$$

$$(10.10) \quad \lambda_j^{m+1} = \max(0, \lambda_j^m + \rho' \left(\frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{h} - C_1 \right))$$

$$(10.11) \quad \lambda_{N+j}^{m+1} = \max(0, \lambda_{N+j}^m + \rho' \left(\frac{u_{j-1}^m - u_j^m}{h} - C_1 \right)).$$

Dans Glowinski-Lions-Trémolières [14, ch. II] on démontre que pour $\rho' > 0$ suffisamment petit, la suite (u_h^m) définie par l'algorithme (10.7)-(10.11) converge vers la solution du problème (10.5). ■

11. UNE METHODE DE TYPE FRANCK ET WOLFE.

Dans ce Numéro, on va décrire une autre méthode de résolution du problème approché (9.1), (9.2), inspirée de la méthode de Franck et Wolfe, cf. Céa [15, ch.4] et utilisée par Morice dans [7].

De façon précise, on utilise l'algorithme ci-dessous :

$$(11.1) \quad u_h^0 \text{ donné dans } u_{ad}^h$$

u_h^n étant connu, on calcule \hat{y}_h^{n+1} , \hat{p}_h^{n+1} par (10.2), (10.3), d'où :

$$(11.2) \quad J'_h(u_h^n) = \frac{\partial H_h}{\partial v_h}(u_h^n, \hat{y}_h^{n+1}, \hat{p}_h^{n+1}),$$

on détermine ensuite \bar{u}_h^{n+1} comme solution du problème :

$$(11.3) \quad \begin{cases} (J'_h(u_h^n), \bar{u}_h^{n+1} - u_h^n) \leq (J'_h(u_h^n), v_h - u_h^n) \quad \forall v_h \in u_{ad}^h \cap K_{hd}^n \\ \bar{u}_h^{n+1} \in u_{ad}^h \cap K_{hd}^n \end{cases}$$

avec, dans (11.3), $K_{hd}^n = \{v_h \mid v_h \in u_h, |v_h - u_h^n| \leq d\}$; on définit enfin u_h^{n+1} comme solution de

$$(11.4) \quad J_h(u_h^{n+1}) \leq J_h(v_h) \quad \forall v_h \in \text{au segment } [u_h^n, \bar{u}_h^{n+1}]. \quad \blacksquare$$

Remarque 11.1 :

On a :

$$(11.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{ad}^h \cap K_{hd}^n = \{v_h \mid v_h \in u_h, \quad \alpha \leq v_h \leq \beta, \quad -d \leq v_h - u_h^n \leq d, \\ \int_0^1 v_h(\xi) d\xi = C_2, \quad -C_1 \leq v_h' \leq C_1 \} \end{array} \right. .$$

Le problème (11.3) est donc un problème de programmation linéaire que l'on résoud par la méthode du simplexe initialisée, dans le calcul de \bar{u}_h^{n+1} , par u_h^n . ■

Remarque 11.2 :

Dans les applications exposées dans ce travail (cf. N° 12), le problème à une variable (11.4) a été résolu par dichotomie. ■

Remarque 11.3 :

La Remarque 10.2, relative à l'algorithme (10.1)-(10.4) vaut également pour l'algorithme (11.1)-(11.4).

12. APPLICATIONS.

Remarque préliminaire : On a supposé aux Numéros 9, 10, 11, que u_h était muni de la structure euclidienne associée au produit scalaire (9.3) ; en fait, il est plus commode d'utiliser la structure euclidienne définie par le produit scalaire :

$$(12.1) \quad (u_h, v_h)_h = h \sum_{j=0}^N u_h(jh) v_h(jh)$$

et c'est ce qui a été fait pour les applications numériques décrites au N° 12.

On reprendrait sans difficulté les considérations développées aux Numéros 9, 10, 11, en supposant que u_h est muni du produit scalaire (12.1). ■

On va se limiter aux deux exemples ci-après, renvoyant à [2] pour d'autres applications numériques.

EXEMPLE 1.

Valeurs numériques des paramètres :

$$C = 10, \quad y_d = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0.75, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 1.$$

Pas de discrétisation : $h = \frac{1}{20}$

Initialisation des algorithmes des Numéros 10 et 11 : on part de u_h^0 défini par :

$$(12.1) \quad \begin{cases} u_h^0(\xi) = 4\varepsilon\xi + C_2 - \varepsilon & \text{si } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \\ u_h^0(\xi) = u_h^0(1 - \xi) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$; on peut donc considérer u_h^0 , pour ε petit, comme une perturbation de $v_h = C_2$ (voir Figure 8).

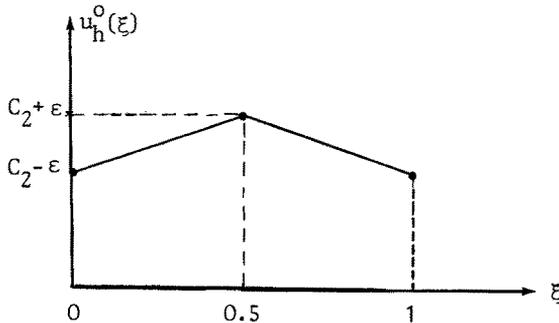


Figure 8.

Test d'arrêt pour les algorithmes des Numéros 10 et 11 : on cesse d'itérer dès que :

$$(12.2) \quad \left\| u_h^{n+1} - u_h^n \right\|_{L^\infty(0,1)} \leq \eta.$$

Calcul de \hat{y}_h^{n+1} , \hat{p}_h^{n+1} : Par la méthode de Cholesky (voir Remarque 10.1).

Application de l'algorithme du gradient avec projection du $N^\circ 10$: on a, en fait, utilisé l'algorithme (10.1)-(10.4) avec un ρ variable à chaque itération, selon les principes (heuristiques) de la méthode du gradient à pas ajustés (cf. par exemple, [14, Ch.II]). Quant au paramètre ρ' de la méthode de projection (10.7)-(10.11), on l'a choisi constant sans rechercher sa valeur optimale.

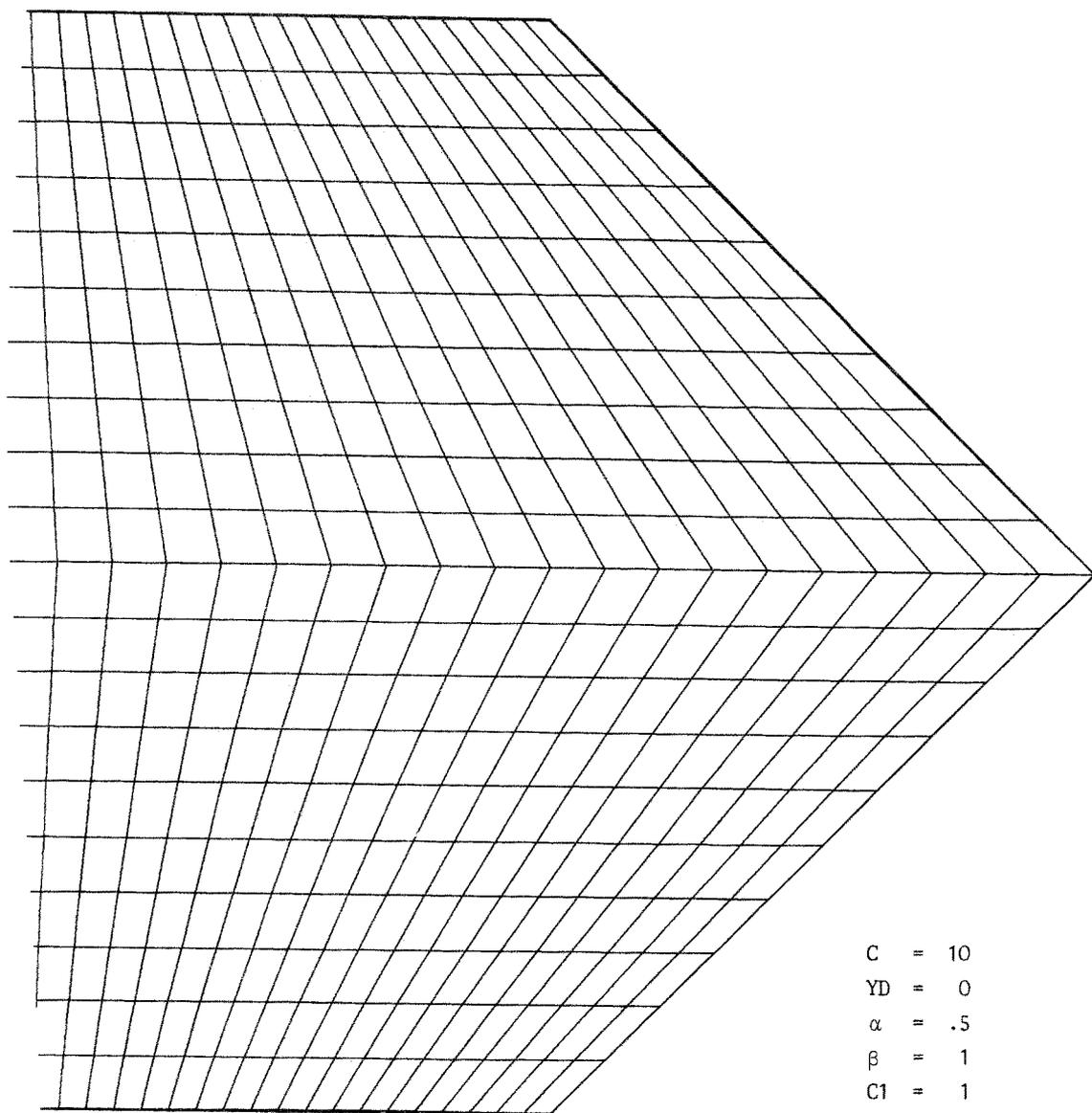
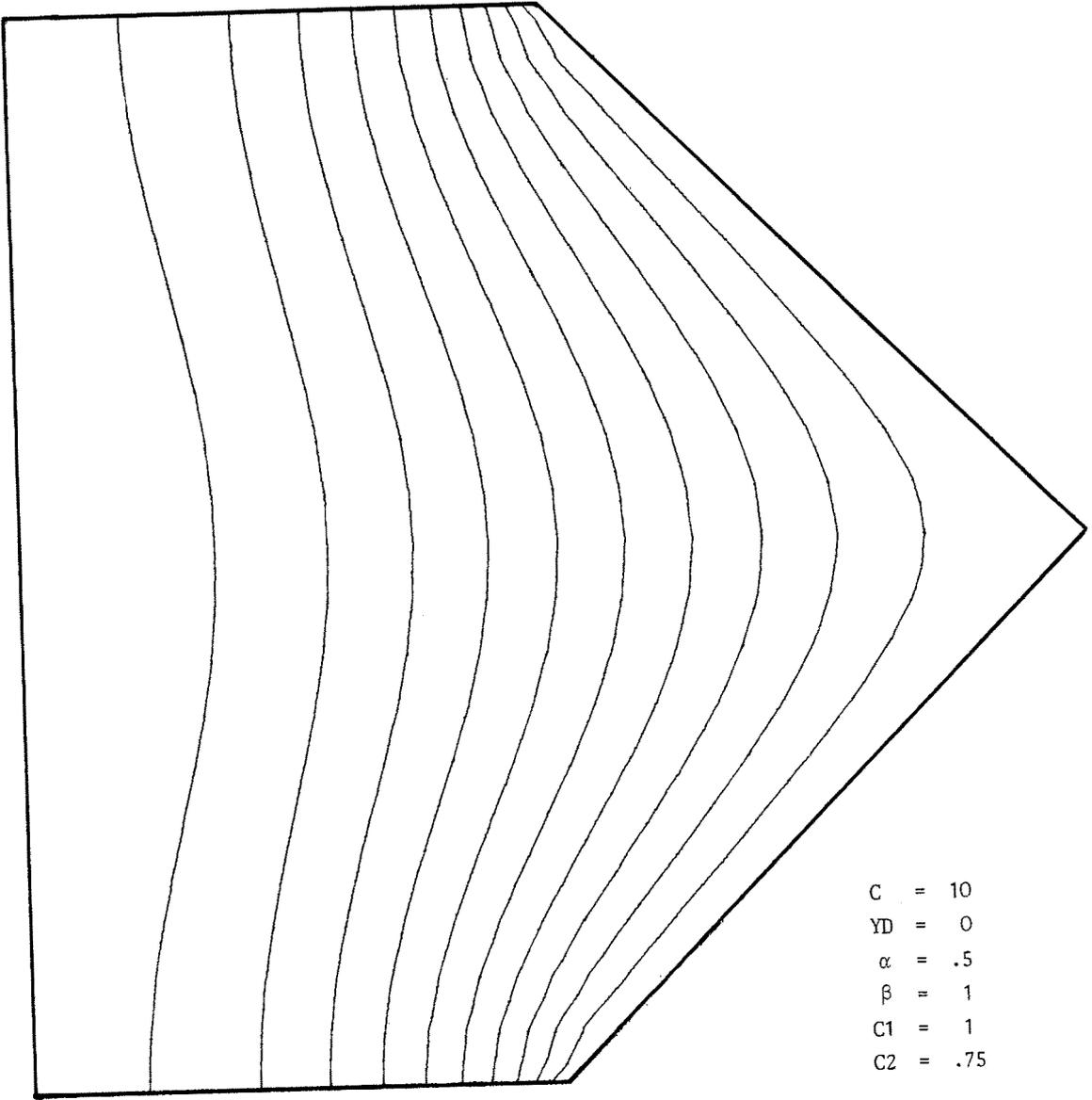


Figure 9
Discretisation du domaine.



$$\|Y - YD\|_{L^2}^2 = 1.590209$$

Figure 10.
Equivalents de Y.

Si $\epsilon \leq 10^{-5}$ dans (12.1), l'algorithme reste bloqué sur u_h^0 ; si $\epsilon \geq 10^{-4}$, il y a convergence (au sens du test d'arrêt (12.2)). Par exemple, pour $\epsilon = 10^{-4}$ et $\eta = 5 \times 10^{-4}$, il y a convergence en 10 itérations, soit 3 minutes de CII 10070, vers la solution représentée sur la Figure 9, avec la partition \mathcal{N}_h correspondante ; sur la Figure 10 on a représenté les équipotentielles de la fonction d'état correspondante. Si $\eta \leq 5 \times 10^{-4}$, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence augmente. A titre indicatif, signalons que la fonction coût (approchée) qui vaut 3.164 pour u_h^0 , est égale à 1.590 pour la solution optimale calculée.

Application de la méthode de Franck et Wolfe du Numéro 11.

On a le même problème de démarrage que dans la méthode précédente et ce, pour les mêmes valeurs de ϵ ; dès que ϵ est suffisamment grand ($\epsilon \geq 10^{-4}$ pour fixer les idées), la convergence est extrêmement rapide puisque dans l'exemple traité, on a $\|u_h^2 - u_h^1\|_{L^\infty(0,1)} < 10^{-10}$, la limite correspondante étant la même que celle

obtenue par l'algorithme de gradient avec projection ; le temps de calcul est de l'ordre de 1 minute 30 secondes sur CII 10070.

Signalons que la quantité d de l'algorithme (11.1)-(11.4) a été prise égale à $\frac{\beta - \alpha}{2}$.

Remarque 12.1 :

Si l'on part de u_h^0 comme représenté sur la Figure 11, pour ϵ suffisamment grand on obtient, par les deux méthodes ci-dessus, le domaine de la Figure 12 ; pour ce dernier domaine, la fonction coût vaut 1.953 .

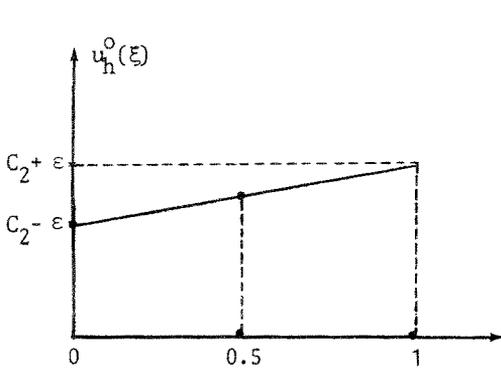


Figure 11

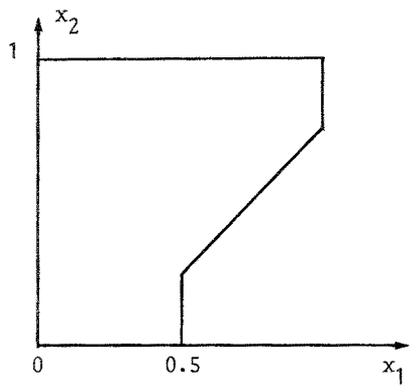


Figure 12

EXEMPLE 2.

Valeurs numériques des paramètres : comme dans l'Exemple 1, sauf $C_1 = 5$.

Pas de discrétisation : $h = \frac{1}{20}$

Initialisation : on part de u_h^0 comme indiqué sur la Figure

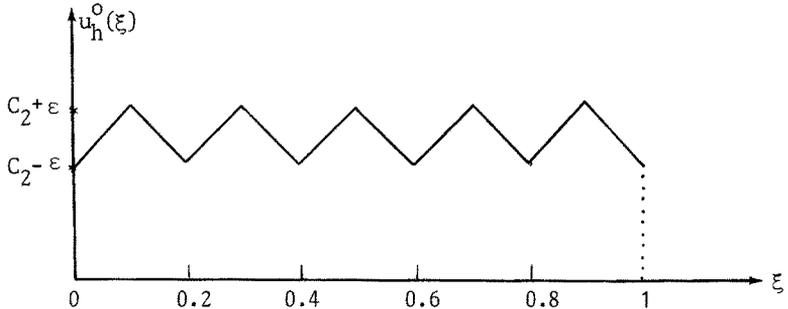


Figure 13.

Test d'arrêt : comme dans l'Exemple 1.

Application de la méthode de Franck et Wolfe du Numéro 11 :

La méthode de gradient avec projection, d'un emploi délicat, n'a pas été utilisée sur cet exemple où l'on s'est limité à celle de Franck et Wolfe.

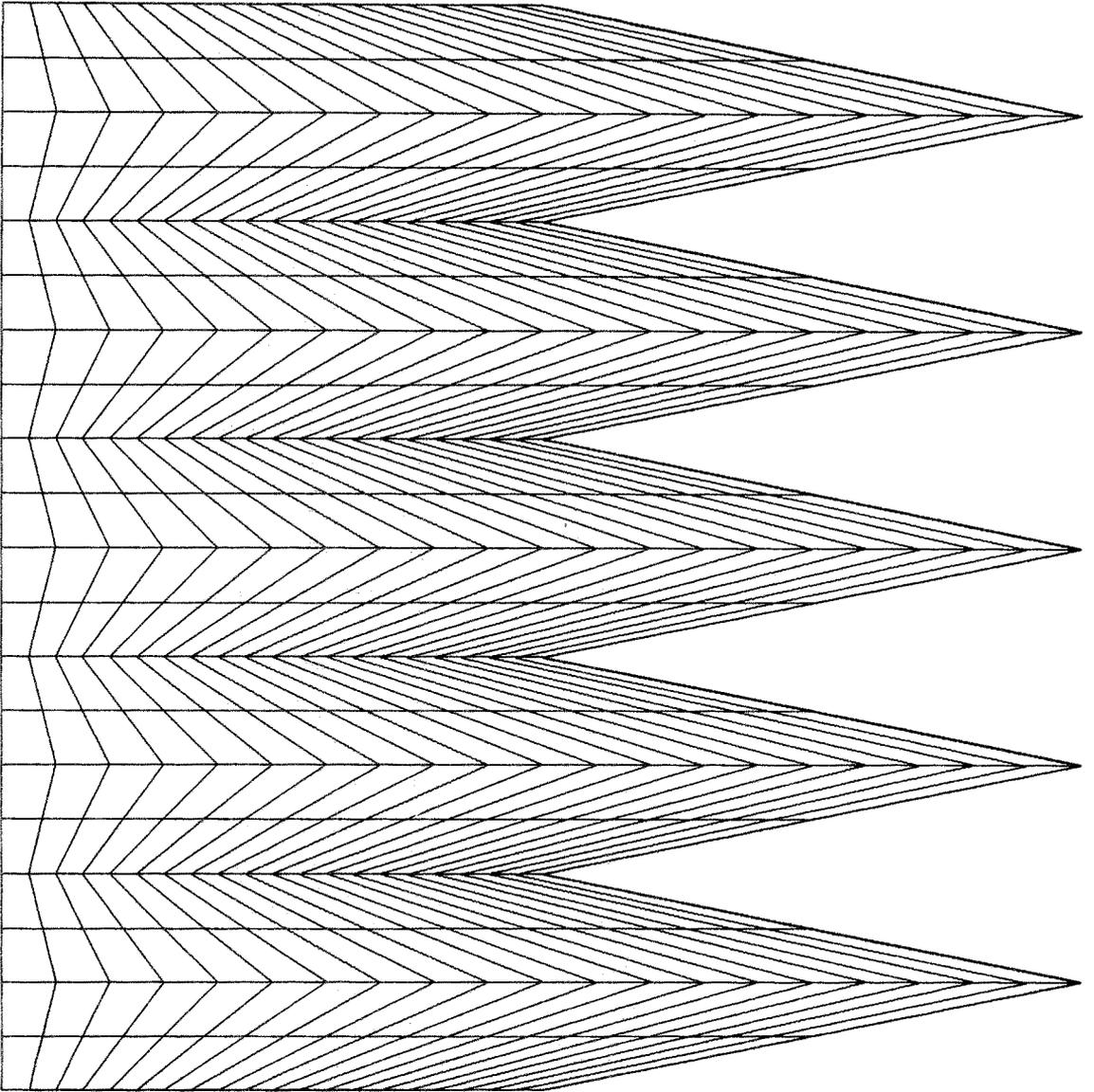
Là encore, si l'on a $\epsilon \leq 10^{-5}$, l'algorithme se bloque sur u_h^0 ; pour $\epsilon \geq 10^{-4}$ et dans des temps comparables à ceux de l'Exemple 1, on a convergence de l'algorithme (11.1)-(11.5) en deux itérations ; on a indiqué sur la Figure 14 le domaine optimal calculé et la partition \mathcal{K}_h correspondante, la valeur de la fonction coût est alors 0.32.

Remarque 12.2 :

Si le domaine initial est le même que celui de l'Exemple 1, avec ϵ suffisamment grand on obtient le domaine de la Figure 15 ; la fonction coût correspondante vaut 0.71.

Remarque 12.3 :

La convergence très rapide de l'algorithme de Franck et Wolfe donne à penser que les limites obtenues correspondent à des minimums relatifs ou plus généralement à des points stationnaires de la fonctionnelle et qu'il y a peu de chances qu'un minimum absolu ait été atteint.



C	$=$	10	β	$=$	1
YD	$=$	0	$C1$	$=$	5
α	$=$.5	$C2$	$=$.75

Figure 14.

Discrétisation du domaine.

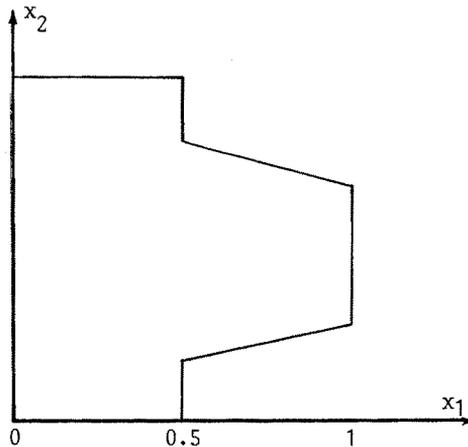


Figure 15.

CONCLUSION :

La méthode d'optimisation de domaine exposée dans ce travail est sans doute moins générale que celles exposées, par exemple dans [5], mais ce qui nous semble essentiel est le fait que, par l'intermédiaire d'approximations par éléments finis adéquates, cette méthode puisse s'étendre à d'autres problèmes de domaine optimal ainsi qu'à certains problèmes de frontière libre (ramenés à des problèmes de domaine optimal) comme, par exemple, ceux considérés par Baiocchi dans [16] et qui feront l'objet d'un travail ultérieur.

REFERENCES

- [1] Bégis D., Glowinski R. : Some numerical problems in optimal control of distributed parameter systems connected with variational inequalities and optimization of a domain. Proceedings of the 1972 IEEE Conference on Decision and Control and 11th Symposium on Adaptive Processes Dec. 13-15, New-Orleans, Louisiana, pp. 366-369.
- [2] Bégis D., Glowinski R. : Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés (à paraître).
- [3] Lions J.L. : Some aspects of the optimal control of distributed systems. Regional Conference Series in Applied Math. SIAM Publication N° 6, 1972.

- [4] Lions J.L. : On the optimal control of distributed parameter systems, pp. 137-158 de Techniques of Optimization, A.Balakrishnan ed. Academic Press, (1972).
- [5] C ea J. : Communication à ce Congrès et bibliographie de ce travail.
- [6] Pironneau O. : On optimum profiles in Stokes flow, J. Fluid Mechanics (1973), Vol 59.1.pp. 117-118.
- [7] Morice P. A paraître.
- [8] Yosida K. Functional Analysis, Springer-Verlag, (1965).
- [9] Lions J.L. : Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles , Presses de l'Université de Montréal (1962).
- [10] Necas J. : Les Méthodes directes en théorie des équations aux dérivées partielles, Masson,(1967).
- [11] Chavent G. : Analyse Fonctionnelle et Identification de coefficients répartis dans des équations aux dérivées partielles, Thèse d'Etat, Paris, (1971).
- [12] Ciarlet P.G., Raviart P.A. : Interpolation Theory over curved elements with applications to finite element methods. Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering , pp. 217-249, (1972).
- [13] Ciarlet P.G.: Orders of convergence in finite element methods, pp. 113-129 de The Mathematics of finite elements and Applications, J.R. Whiteman ed. Academic Press,(1973).
- [14] Glowinski R., Lions J.L., Trémolières R. : Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles, Paris, Dunod, (1974).
- [15] C ea J. : Optimisation. Théorie et Algorithmes.Paris, Dunod (1971).
- [16] Baiocchi C. : Communication à ce Congrès et bibliographie de ce travail.