# $E_n E_{n-1}$ -entscheidbare Gruppen

## J. Avenhaus und K. Madlener Universität Kaiserslautern

Konstruiert man zu einer Turing-Maschine (TM), die eine unentscheidbare Menge erkennt, in bekannter Weise [4] die TM-Halbgruppe F, so ist das Wortproblem für F unentscheidbar. Boone [1] geht von einer TM aus, die eine Menge vom Unentscheidbarkeitsgrad D erkennt und zeigt, daß sich mit der zugehörigen TM-Halbgruppe F eine endlich dargestellte Gruppe G explizit angeben läßt, so daß das Wortproblem für G und das spezielle Wortproblem für F aufeinander reduzierbar sind. Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Ergebnis auf den subrekursiven Bereich übertragbar

Wir betrachten in dieser Arbeit die subrekursive Hierarchie der Grzegorczyk-Klassen  ${\rm E}_n$  von Wortfunktionen und konstruieren zu jedem  $n\geq 3$  eine TM-Halbgruppe  ${\rm F}$  und eine endlich dargestellte Gruppe G, so daß das Wortproblem für G und das spezielle Wortproblem für  ${\rm F}$  aufeinander reduzierbar sind und die Komplexität  ${\rm E}_n$  haben. Geht man von einer TM aus, die eine  ${\rm E}_n{\rm E}_{n-1}$ -entscheidbare Menge erkennt, so erhält man eine endlich dargestellte Gruppe mit  ${\rm E}_n{\rm E}_{n-1}$ -entscheidbarem Wortproblem.

Dieses Ergebnis läßt sich auf beliebige Funktionenklassen K'  $\subset$  K übertragen, falls K Rechenzeit-abgeschlossen und abgeschlossen gegenüber der Komposition und der beschränkten Rekursion ist und die Klasse E $_3$  enthält (siehe Meyer-Ritchie [7]). Außerdem läßt sich der Higman'sche Einbettungssatz übertragen: Zu jeder K-entscheidbaren rekursiv dargestellten Gruppe G läßt sich explizit eine K-entscheidbare endlich dargestellte Gruppe H angeben, in die G K-eingebettet ist. Diese beiden letzten Ergebnisse werden in einer späteren Arbeit bewiesen.

Die Existenz einer  $E_n E_{n-1}$ -entscheidbaren Gruppe wurde schon von Cannonito [2] und Gatterdam [3], [5] mit Hilfe der von Cannonito eingeführten  $E_n$ -berechenbaren Gruppen und dem von Gatterdam auf  $E_n$ -berechenbare Gruppen übertragenen Einbettungssatz von Higman auf anderem Wege für  $n \geq 4$  bewiesen. Dabei liefert der Einbettungssatz von Higman zwar effektiv eine endlich dargestellte Gruppe, aber die Konstruktion ist in der Praxis nicht durchführbar und läßt im Gegensatz zur Boone-Konstruktion nicht erkennen, wie die endlich dargestellte Gruppe schließlich aussieht.

Die Arbeit ist in drei Paragraphen eingeteilt. Zunächst wird die

Boone-Konstruktion beschrieben, und es werden die Hauptergebnisse formuliert. Im zweiten Paragraphen werden die gruppentheoretischen Hilfsmittel bereitgestellt, und im letzten Teil werden die Hauptergebnisse bewiesen.

#### 1. Die Konstruktion von Boone. Hauptergebnisse.

Sei S eine endliche Menge. S\* ist dann die Menge aller Wörter über S und e das leere Wort. Weiter ist  $\Xi$  die Identität auf S\* und |w| die Länge von  $w \in S^*$ . Man kann wie bei den arithmetischen Funktionen die Grzegorczyk-Hierarchie  $E_n(S)$  in der Menge der Wortfunktionen über dem Alphabet S einführen. Eine Menge A  $\subseteq$  S\* ist  $E_n$ -entscheidbar, falls für die charakteristische Funktionen  $\chi_A \in E_n(S)$  gilt. Wir setzen voraus, daß der Leser mit dieser Theorie vertraut ist und benutzen einige Sätze von Weihrauch [9], [6] ohne weiteren Hinweis.

### <u>Satz 1</u>. Sei n > 3.

- a) Ist A eine E $_n$ -entscheidbare Menge, so gibt es eine TM, die die charakteristische Funktion  $\chi_A$  in einer Rechenzeitschranke t  $_\epsilon$  E $_n$ (S) berechnet.
- b) Es gibt eine Menge A  $\subset$  S\*, die E $_n$  aber nicht E $_{n-1}$ -entscheidbar ist.

Die TM T, die eine  $E_n$ -entscheidbare Menge A akzeptiert, läßt sich so modifizieren, daß die Menge der Konfiguration u $q_i$ v (u,v  $\epsilon$  S\*,  $q_i$  Zustand), von denen aus T den akzeptierenden Zustand erreicht,  $E_n$ -entscheidbar ist. Geht man nun zur TM-Halbgruppe über, so gilt:

<u>Satz 2</u>. Es sei S eine endliche Menge,  $S_O = S \cup \{h\}$  und  $n \ge 3$ . Dann gibt es eine TM-Halbgruppe  $\Gamma = (S_O \cup \Omega; \Pi)$  mit endlich vielen Erzeugenden  $S_O \cup \Omega$ , einem ausgezeichneten Element  $q \in \Omega$  und endlich vielen Relationen  $\Pi$ , so daß das spezielle Wortproblem P von  $\Gamma$ 

$$P(w) \iff w = q \text{ in } \Gamma \qquad w \in (S_0 \cup Q)^*$$

 ${\rm E}_n-{\rm entscheidbar}$  ist. Geht man von einer  ${\rm E}_n {\rm E}_{n-1}-{\rm entscheidbar}$ en Menge A aus, so ist P  ${\rm E}_n {\rm E}_{n-1}-{\rm entscheidbar}$ .

Man überlegt sich leicht, daß P schon  $E_n$ -entscheidbar ist, wenn für alle u,v  $\epsilon$   $S_0^*$ ,  $q_j$   $\epsilon$  Q,  $uq_jv$  = q in  $\Gamma$   $E_n$ -entscheidbar ist.

Sei S eine Menge,  $\overline{S} = \{\overline{s} : s \in S\}$ ,  $\underline{S} = S \cup \overline{S}$  und  $\Delta \subseteq \underline{S}^*$ . Mit  $\langle S; \Delta \rangle$  bezeichnen wir die Gruppe, die durch die Erzeugenden S und die definierenden Relatoren  $\Delta$  gegeben ist. Jedes Wort w  $\varepsilon \underline{S}^*$  stellt ein Element aus  $\langle S; \Delta \rangle$  dar,  $\overline{s}$  stellt das zu s inverse Element und e das Einselement dar. Stellen u,v  $\varepsilon \underline{S}^*$  gleiche Elemente von  $\langle S; \Delta \rangle$  dar, so schreiben wir

 $u = v \text{ in } \langle S; \Delta \rangle.$ 

Eine Gruppe G hat eine Darstellung  $\langle S; \Delta \rangle$ , falls G  $\cong \langle S; \Delta \rangle$  ist. G heißt endlich erzeugt (e.e.) bzw. endlich dargestellt (e.d.), falls S bzw. S und  $\Delta$  endlich sind.

Im folgenden beschränken wir uns auf e.e. Gruppen.

Mit und 1 bezeichnen wir die Funktionen aus  $E_1(\underline{S})$ , die durch  $\overline{s_1 s_2 \dots s_n} = \overline{s_1} \overline{s_2} \dots \overline{s_n}$ ,  $\overline{\overline{s_i}} = s_i$  und  $(s_1 s_2 \dots s_n)^{-1} = \overline{s_n} \dots \overline{s_2} \overline{s_1}$ ,  $s_i \in \underline{S}$  gegeben sind.

<u>Definition 1</u>. Sei  $n \ge 1$ . Die Gruppe  $\langle S; \Delta \rangle$  heißt  $E_n$ -entscheidbar, falls die Menge der Relatoren  $R = \{ w \in \underline{S}^* : w = e \text{ in } \langle S; \Delta \rangle \}$   $E_n$ -entscheidbar ist. Eine Gruppe G ist  $E_n$ -entscheidbar, wenn es eine  $E_n$ -entscheidbare Darstellung von G gibt.

Man überlegt sich leicht, daß die  $\rm E_n$ -Entscheidbarkeit einer e.e. Gruppe unabhängig von der speziellen Darstellung ist und daß freie, endliche und allgemeiner alle Gruppen, für die Dehn's Algorithmus zur Lösung des Wortproblems anwendbar ist,  $\rm E_1$ -entscheidbar sind.

Wir betrachten nur noch Gruppen, die durch Erzeugende und definierende Relatoren gegeben sind. Hierbei verwenden wir definierende Relationen statt Relatoren, wo dieses zweckmäßig erscheint, und benutzen die Bezeichnung G' =  $\langle G, S'; \Delta' \rangle$ , falls G =  $\langle S; \Delta \rangle$  und G' =  $\langle S \cup S'; \Delta \cup \Delta' \rangle$  ist. Wir führen nun wie Rotman [8] eine etwas modifizierte Boone-Konstruktion durch und erhalten eine Gruppe, deren Wortproblem die gleiche Komplexität hat wie das Problem P in  $\Gamma$ .

Sei  $\Gamma$  = (S  $\cup$  Q;  $\Pi$ ) eine TM-Halbgruppe mit den endlich vielen Relationen  $F_i q_{i_1} G_i = H_i q_{i_2} K_i$ ;  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$ ,  $K_i \in S^*$ ,  $q_{i_1}$ ,  $q_{i_2} \in \Omega$  (i = 1,...,N). Ist  $R = \{r_1, \ldots, r_N\}$  und sind x, t, k neue Symbole, so werden die Gruppen  $G_0, \ldots, G_5$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} &G_{O} = \langle x; \emptyset \rangle \\ &G_{1} = \langle G_{O}, S; \overline{s}xs = x^{2}, s \in S \rangle \\ &G_{2} = \langle G_{1}, Q; \emptyset \rangle \\ &G_{3} = \langle G_{2}, R; \overline{r_{i}} \overline{F_{i}} q_{i_{1}} G_{i} r_{i} = \overline{H_{i}} q_{i_{2}} K_{i}, \overline{r_{i}} sxr_{i} = s\overline{x}, 1 \leq i \leq N, s \in S \rangle \\ &G_{4} = \langle G_{3}, t; \overline{t}xt = x, \overline{t}rt = r, r \in R \rangle \\ &G_{5} = \langle G_{4}, k; \overline{k}ak = a, a \in \{x, \overline{q}tq\} \cup R \rangle \end{aligned}$$

Offenbar sind die Gruppen  $G_i$  (i = 0,...,5) endlich dargestellt. Es gilt der folgende zentrale Satz der Arbeit, der in Paragraph 3 bewiesen wird:

Satz 3. a) Die Gruppen  $G_0$  bis  $G_4$  sind  $E_3$ -entscheidbar.

b) Das Wortproblem von  ${\rm G_5}$  hat die gleiche Komplexität wie das spezielle Wortproblem P von  ${\rm F}$ , d.h. P ist genau dann  ${\rm E_n}$ -entscheidbar, wenn

 $G_5$   $E_n$ -entscheidbar ist (n  $\geq$  3).

Geht man bei dieser Konstruktion von einer TM-Halbgruppe F mit  $E_n \setminus E_{n-1}$  entscheidbarem Problem P aus, so ist  $G_5$   $E_n \setminus E_{n-1}$ -entscheidbar.

<u>Satz 4.</u> Es gibt für n  $\geq$  3 e.d. Gruppen, deren Wortproblem E<sub>n</sub>-, aber nicht E<sub>n-1</sub>-entscheidbar ist.

Auf Grund dieses Ergebnisses stellt sich die Frage nach der Existenz von e.d. Gruppen mit einer minimalen Anzahl von definierenden Relatoren, deren Wortproblem  $\mathbf{E_n} \mathbf{E_{n-1}}$ -entscheidbar ist. Es ist bekannt, daß Einrelatorengruppen entscheidbar sind; wir können sogar zeigen, daß Einrelatorengruppen mit definierendem Relator der Länge  $\leq 2n-1$   $\mathbf{E_n}$ -entscheidbar sind. Offen ist noch, ob es Einrelatorengruppen mit  $\mathbf{E_n} \mathbf{E_{n-1}}$ -entscheidbarem Wortproblem gibt.

Das verallgemeinerte Wortproblem für eine Gruppe G =  $\langle S; \Delta \rangle$  und eine Untergruppe H von G besteht darin, zu entscheiden, ob ein Wort w  $\epsilon$   $\underline{S}$ \* ein Element aus H darstellt oder nicht. Der Beweis zu Satz 3 liefert folgende Verschärfung des Resultates I von Boone [1].

<u>Satz 5.</u> Zu jedem  $n \ge 3$  (zu jedem Unentscheidbarkeitsgrad D) gibt es eine  $E_3$ -entscheidbare e.d. Gruppe G mit einer e.e. Untergruppe H, so daß das verallgemeinerte Wortproblem  $E_n E_{n-1}$ -entscheidbar ist (den Unentscheidbarkeitsgrad D hat).

### 2. Gruppentheoretische Hilfsmittel

Es sei  $G = \langle S; \Delta \rangle$  eine Gruppe. Eine Funktion  $f : \underline{S}^* \longrightarrow \underline{S}^*$  heißt eine Entscheidungsfunktion für G, wenn für alle  $w \in S^*$  gilt a) f(w) = w in G und b)  $f(w) \equiv e$ , falls w = e in G. Offenbar ist G genau dann  $E_n$ -entscheidbar, wenn es eine Entscheidungsfunktion  $f \in E_n(\underline{S})$  für G gibt. Ist  $A \subseteq \underline{S}^*$ , so sei  $\langle A \rangle$  die Menge der Wörter, die ein Element aus der von A erzeugten Untergruppe darstellen. Ist  $G' = \langle G, S'; \Delta' \rangle$  eine weitere Gruppe, so schreiben wir  $G \subseteq G'$ , falls für alle  $w \in \underline{S}^*$ , w = e in G' genau dann gilt, wenn w = e in G gilt.

Das wesentliche gruppentheoretische Hilfsmittel dieser Arbeit ist das Konzept der Britton-Erweiterung. Wir stellen hier einige Fakten zusammen, die später benötigt werden. Für fehlende Beweise sei auf Rotman [8] verwiesen.

<u>Definition 1.</u> Es sei  $G = \langle S; A \rangle$  eine Gruppe und  $P = \{p_i : i \in I\}$  eine Menge mit  $P \cap S = \emptyset$ , es seien weiterhin für alle  $i \in I$  Teilmengen  $A_i = \{a_{ij} : j \in J_i\}$  und  $B_i = \{b_{ij} : j \in J_i\}$  von  $S^*$  gegeben. Dann heißt  $G' = \langle G, P; \overline{p_i} a_{ij} p_i = b_{ij}$ ,  $i \in I, j \in J_i \rangle$  eine Britton-Erweiterung von G mit stabilen Buchstaben P, falls für jedes  $i \in I$  die von  $A_i$  und  $B_i$  erzeugten

Untergruppen von G unter der Abbildung  $a_{ij} \leftarrow > b_{ij}$  isomorph sind.

Ist u  $\epsilon$   $\underline{S}^*$ , so heißt ein Wort der Form  $p_i^{-\epsilon}up_i^{\epsilon}$  ein Pinch, falls  $\epsilon=1$  und u  $\epsilon$   $<A_i>$  oder  $\epsilon=-1$  und u  $\epsilon$   $<B_i>$  gilt. Ist  $\overline{p_i}up_i$  ein Pinch und sind  $<A_i>$  und  $<B_i>$  unter  $\phi_i$  isomorph, so gilt natürlich  $\overline{p_i}up_i=\phi_i(u)$  in G'. Ein Wort w  $\epsilon$  (S  $\phi$  P) heißt P-reduziert, falls es keinen Pinch als Teilwort enthält.

<u>Satz 1</u>. Ist G' eine Britton-Erweiterung von  $G = \langle S; \Delta \rangle$  mit stabilen Buchstaben P und w  $\epsilon$  (<u>S v P</u>) \* mit w = e in G', so gilt entweder w  $\epsilon$  <u>S</u>\* und w = e in G oder w enthält einen Pinch als Teilwort. Außerdem gilt G < G'.

Aus Satz 1 folgt unmittelbar

Lemma 1. Sei G' eine Britton-Erweiterung von  $G = \langle S; \Delta \rangle$  mit stabilen Buchstaben P, seien  $u = u_0 p_1^{\epsilon_1} u_1 \dots p_n^{\epsilon_n} u_n$  und  $v = v_0 q_1^{\epsilon_1} v_1 \dots q_m^{\epsilon_m} v_m$  ( $u_i$ ,  $v_i \in \underline{S}^*$ ,  $p_i$ ,  $q_i \in P$ ,  $\epsilon_i$ ,  $n_i = \pm 1$ ) P-reduzierte Wörter und gelte u = v in G'. Dann gilt n = m,  $p_i = q_i$  und  $\epsilon_i = n_i$  für  $i = 1, 2, \ldots, n$  und  $p_1^{\epsilon_1} u_0^{-1} v_0 p_1^{\epsilon_1}$  ist ein Pinch.

 $\begin{array}{lll} \underline{\text{Definition 2.}} & \text{a)} & \text{Seien G}_{\underline{i}} = \langle S_{\underline{i}}; \Delta_{\underline{i}} \rangle, \ \underline{i} = 0,1,\ldots,m, \ \text{Gruppen mit S}_{\underline{i}} = \\ S_{\underline{i-1}} & \mathbf{v} & P_{\underline{i}}, \ \text{so daß G}_{\underline{i}} \ \text{eine Britton-Erweiterung von G}_{\underline{i-1}} \ \text{mit stabilen} \\ \underline{\text{Buchstaben P}_{\underline{i}}} \ \text{ist. Dann heißt G}_{\underline{0}} \leq \underline{G}_{\underline{1}} \leq \ldots \leq \underline{G}_{\underline{m}} \ \text{ein Britton-Turm.} \end{array}$ 

- b) Ein Wort w  $\epsilon$   $S_{\dot{1}}^{\dot{n}}$  ( $i \geq 1$ ) heißt reduziert, falls es keinen Pinch  $p^{-\epsilon}up^{\epsilon}$  in  $G_{\dot{1}}$  ( $\dot{1} \leq i$ ) als Teilwort enthält.
- c) Eine Funktion  $f_i: \underline{S_i^*} \longrightarrow \underline{S_i^*}$  ( $i \ge 1$ ) heißt eine Reduktionsfunktion für  $G_i$ , falls für alle w  $\epsilon \ \underline{S_i^*}$  gilt: (1)  $f_i(w) = w$  in  $G_i$ , (2)  $f_i(w)$  ist reduziert, (3)  $f_i(w) = \epsilon$ , falls  $w = \epsilon$  in  $G_i$  und (4)  $f_i(w) = w$ , falls  $w = \epsilon$  reduziert und nicht  $w = \epsilon$  in  $G_i$  ist.

Eine Reduktionsfunktion  $f_i$  für  $G_i$  ist also auch eine Entscheidungsfunktion von  $G_i$ . Wir untersuchen nun, wann eine Britton-Erweiterung einer  $E_n$ -entscheidbaren Gruppe wieder  $E_n$ -entscheidbar ist.

Definition 3. a) Eine Britton-Erweiterung G' von G = <S; $_{\Lambda}>$  mit stabilen Buchstaben P = {p<sub>i</sub> : i  $_{\epsilon}$  I} heißt E<sub>n</sub>-zulässig (n  $_{\Delta}$  3), falls für alle i  $_{\epsilon}$  I gilt

- (1)  $\langle A_i \rangle$  und  $\langle B_i \rangle$  sind in  $\underline{\underline{S}}^*$   $E_n$ -entscheidbar.
- (2) Es gibt linear beschränkte Funktionen  $\phi_i$ ,  $\widehat{\phi}_i \in E_n(\underline{S})$ , die die Isomorphismen  $\langle A_i \rangle \longrightarrow \langle B_i \rangle$  bzw.  $\langle B_i \rangle \longrightarrow \langle A_i \rangle$  realisieren.
- b) Ein Britton-Turm  $G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m$  heißt  $E_n$ -zulässig, falls für  $i=1,2,\ldots,m$   $G_i$  eine  $E_n$ -zulässige Britton-Erweiterung von  $G_{i-1}$  ist.
- Satz 2. Ist  $G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m$  ein  $E_n$ -zulässiger Britton-Turm und ist  $G_0 \in E_n$ -entscheidbar, so gibt es Reduktionsfunktionen  $f_i \in E_n(\underline{S_i})$  für  $G_i$  (i = 1,2,...,m). Die Gruppen  $G_i$  sind also  $E_n$ -entscheidbar.

<u>Beweis</u>: Wir betrachten nur den Fall m = 1. Sei  $f_0$  eine Entscheidungsfunktion für  $G_0$ . Wir definieren h :  $S_1^* \longrightarrow S_1^*$  durch

Dann ist h  $\epsilon$  E<sub>n</sub>(S<sub>1</sub>) und für alle w  $\epsilon$  S<sub>1</sub>\* gilt h(w) = w in G<sub>1</sub> und h(w) ist reduziert. Definiert man nun f<sub>1</sub> durch f<sub>1</sub>(w)  $\equiv$  f<sub>0</sub>(w<sub>0</sub>)p<sub>1</sub>\* f<sub>0</sub>(w<sub>1</sub>)... ... p<sub>m</sub>\* f<sub>0</sub>(w<sub>m</sub>), falls h(w)  $\equiv$  w<sub>0</sub>p<sub>1</sub>\*  $\geq$  w<sub>1</sub> ... p<sub>m</sub>\* w<sub>m</sub> (w<sub>1</sub>  $\epsilon$  S<sub>2</sub>\*, p<sub>1</sub>  $\epsilon$  P,  $\epsilon$  = ±1) gilt, so ist f<sub>1</sub> eine Reduktionsfunktion von G<sub>1</sub>, die in E<sub>n</sub>(S<sub>1</sub>) liegt.

### 3. Beweis von Satz 1.3

Zum Beweis von Teil a) des Satzes 1.3 zeigen wir, daß die in Paragraph 1 definierten Gruppen einen  $E_3$ -zulässigen Britton-Turm  $G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_4$  bilden. Da  $G_0$  als freie Gruppe natürlich  $E_3$ -entscheidbar ist, sind dann auch  $G_1$  bis  $G_4$   $E_3$ -entscheidbar. Rotman [8] zeigt, daß  $G_0 \leq \ldots \leq G_4$  ein Britton-Turm ist; es bleibt also nur die  $E_3$ -Zulässigkeit nachzuweisen. Sei  $S_1$  die Menge der Erzeugenden von  $G_1$  (i = 0,1,...,5).

<u>Lemma 1.</u> Für i = 1,2 ist  $G_i$  eine  $E_3$ -zulässige Britton-Erweiterung von  $G_{i-1}$ . Es gibt also Reduktionsfunktionen  $f_i \in E_3(\underline{S_i})$  für  $G_i$ .

Der Beweis ist einfach und wird übergangen.

<u>Lemma 2.</u>  $G_3$  ist eine  $E_3$ -zulässige Britton-Erweiterung von  $G_2$ . Es gibt also eine Reduktionsfunktion  $f_3 \in E_3(S_3)$  für  $G_3$ .

 $G_3$  ist eine Britton-Erweiterung von  $G_2$  mit stabilen Buchstaben  $R=\{r_i:i=1,2,\ldots,N\}$ . In der Terminologie von Definition 2.1 ist  $A_i=\{\overline{F_i}q_{i_1}G_i,s_1x,\ldots,s_Mx\}$  und  $B_i=\{\overline{H_i}q_{i_2}K_i,s_1\overline{x},\ldots,s_M\overline{x}\}$ . Zum Beweis von Lemma 2 muß gezeigt werden, daß für alle  $i=1,2,\ldots,N$   $<A_i>$  und  $<B_i>$   $E_3$ -entscheidbare Untergruppen von  $G_2$  sind und daß es linear beschränkte Abbildungen  $\phi_i$ ,  $\widehat{\phi}_i$   $\epsilon$   $E_3(\underline{S_2})$  gibt, die die Isomorphismen  $<A_i>\longrightarrow <B_i>$  und  $<B_i>\longrightarrow <A_i>$  realisieren. Ein Beweis hierfür ergibt sich, wenn man den Beweis des folgenden Lemmas konstruktiv ausführt.

<u>Lemma 3.</u> Es sei w  $\epsilon$   $S_2^*$  und  $1 \le i \le N$ . Genau dann gilt w  $\epsilon$   $\langle A_i \rangle$  (bzw. W  $\epsilon$   $\langle B_j \rangle$ ), wenn es ein w" in den Erzeugenden von  $\langle A_i \rangle$  (bzw.  $\langle B_i \rangle$ ) gibt mit w = w" in  $G_2$  und  $|w''| \le \alpha |w|$ . Dabei ist  $\alpha = 1 + \max\{|F_j G_j|, |H_j K_j|: j = 1, 2, \ldots, N\}$ .

Beweis: Die eine Richtung der Aussage ist trivial. Wir zeigen nur, daß

es zu jedem w  $\epsilon$  <A<sub>i</sub>> ein w" in den Erzeugenden von <A<sub>i</sub>> gibt mit w = w" in G<sub>2</sub> und  $|w''| \le \alpha |w|$ .

Sei also  $w \in \langle A_i \rangle$  und  $w' \equiv f_2(w) \equiv u_0 q_1^{n_1} u_1 \dots q_m^{n_m} u_m$  mit  $u_j \in \underline{S_1}^*$ ,  $q_j \in Q$ . Dann gilt auch w'  $\epsilon$  <A<sub>i</sub>>, w' ist Q-reduziert, und die u, sind S-reduziert. Es gibt also Wörter w in  $s_1 x_1, \dots, s_M x$  und  $\varepsilon_j = \pm 1$  mit  $u_0 q_1^{\eta_1} u_1 \dots$  $\dots q_m^{n_m} u_m = w_0 (\overline{F_i} q_{i_1} G_1)^{\varepsilon_1} w_1 \dots (\overline{F_i} q_{i_1} G_1)^{\varepsilon_n} w_n \text{ in } G_2. \text{ Wählt man n minimal,}$ so ist die rechte Seite  $\Omega$ -reduziert, und nach Lemma 2.1 gilt m = n,  $\begin{array}{lll} \eta_{j} = \epsilon_{j} \text{ und } q_{j} = q_{i_{1}} \text{ (j = 1,2,...,n) und } \overline{q_{i_{1}}} (w_{o}\overline{F_{i}})^{-1} u_{o}q_{i_{1}} \text{ oder} \\ q_{i_{1}} (w_{o}G_{i})^{-1} u_{o}\overline{q_{i_{1}}} \text{ ist ein Q-Pinch, jenachdem, ob } \epsilon_{1} = +1 \text{ oder } \epsilon_{1} = -1 \text{ ist.} \end{array}$ Daraus folgt  $(w_0F_1)^{-1}u_0 = e$  in  $G_1$  bzw.  $(w_0G_1)^{-1}u_0 = e$  in  $G_1$ . Definiert man  $E_j$ ,  $D_j \in S_{\underline{i}}^*$  durch  $E_j q_{\underline{i}}^{\varepsilon j} D_j = (\overline{F_i} q_{\underline{i}} G_i)^{\varepsilon j}$  für j = 1, 2, ..., n und  $D_0 =$  $\equiv E_0 \equiv D_{n+1} \equiv E_{n+1} \equiv e$ , so sind die  $E_1 \equiv \overline{S}$ \* (negative Wörter) und die D<sub>j</sub>  $\in$  S\* (positive Wörter). Durch Induktion nach j zeigt man  $D_j^{-1}u_jE_{j+1}^{-1} = w_j$  in  $G_1$ , j = 0,1,...,n. Setzt man  $u_j = f_1(D_j^{-1}u_jE_{j+1}^{-1})$ , so ist  $u_j = 0$ . reduziert, und es gilt uj = w in G1. Es gibt also frei reduzierte und damit S-reduzierte - Wörter  $v_j$  in  $s_1x,...,s_Mx$  mit  $v_j = u_j^t$  in  $G_1$ , die Q-Länge von w, d.h. die Anzahl der in w auftretenden Buchstaben aus Q, und es sei  $|w|_S$  die S-Länge von w. Dann gilt  $|w'|_Q = |w''|_Q = n$ . Wir zeigen, daß für die S-Längen  $|\mathbf{v_j}|_S \leq |\mathbf{u_j}|_S$  gilt. Für  $\mathbf{v_j}$  = e ist das trivial. Sei also  $v_j \stackrel{!}{=} e$ .  $D_j$  und  $E_j$  sind als positive bzw. negative Wörter S-reduziert und v, ist S-reduziert. Wegen der speziellen Gestalt von  $D_j$ ,  $v_j$  und  $E_{j+1}$  kann es in  $D_j v_j E_{j+1}$  auch keinen Pinch auf der Grenze  $D_j - v_j$  oder  $v_j - E_{j+1}$  geben. Also ist  $D_j v_j E_{j+1}$  S-reduziert und es gilt  $u_j = D_j v_j E_{j+1}$  in  $G_1$ . Da auch  $u_j$  S-reduziert ist, läßt sich Lemma 2.1 anwenden, und es gilt  $|u_j|_S = |D_j v_j E_{j+1}|_S = |D_j|_S + |v_j|_S + |E_{j+1}|_S \ge$  $\geq |v_i|_S$ . Wegen  $\alpha \geq 2$  ergibt sich jetzt

Wegen  $w' \equiv f_2(w)$  gilt  $|w'|_S \leq |w|_S$  und  $|w'|_Q \leq |w|_Q$ . Also folgt  $|w''| \leq \alpha(|w'|_S + |w'|_Q) \leq \alpha(|w|_S + |w|_Q) \leq \alpha|w|.$ 

Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Dieser Beweis zeigt, daß  $<A_i>$   $E_3$ -entscheidbar ist und daß man jedes w  $\epsilon < A_i>$  durch einen  $E_3$ -Prozeß in ein Wort w" in den Erzeugenden von  $<A_i>$  umschreiben kann.  $\widetilde{w}$  entstehe aus w", indem man  $(sx)^\epsilon$  durch  $(s\overline{x})^\epsilon$  und  $(\overline{F_i}q_{i_1}G_i)^\epsilon$  durch  $(\overline{H_i}q_{i_2}K_i)^\epsilon$  ersetzt. Die Abbildung  $\phi_i: w \longmapsto \widetilde{w}$  realisiert dann den Isomorphismus  $<A_i> \longrightarrow <B_i>$ , liegt in  $E_3(\underline{S_2})$  und ist linear beschränkt.

Bei der konstruktiven Ausführung des Beweises zu Lemma 3 ergibt sich

noch folgendes Lemma:

<u>Lemma 5</u>.  $G_4$  ist  $E_3$ -zulässige Britton-Erweiterung von  $G_3$ . Es gibt also eine Reduktionsfunktion  $f_4$   $\epsilon$   $E_3$   $(S_4)$  für  $G_4$ .

Beweis:  $G_4$  ist Britton-Erweiterung von  $G_3$  mit einem stabilen Buchstaben t. Ist  $A = R \cup \{x\} = B$ , so muß gezeigt werden, daß < A > eine  $E_3$ -entscheidbare Untergruppe von  $G_3$  ist. Die Identität auf  $S_3^*$  realisiert die Isomorphismen  $< A > \longrightarrow < B >$  und  $< B > \longrightarrow < A >$ , sie ist natürlich linear beschränkt. Zu zeigen bleibt also nur die  $E_3$ -Entscheidbarkeit von < A >.

Sei  $R_x = R \cup \{x\}$ . Zunächst sieht man leicht, daß ein frei reduziertes Wort aus  $R_x^*$  auch reduziert in  $G_3$  ist. Ist w  $\varepsilon \cdot \frac{S_3^*}{3}$  und w'  $\varepsilon \cdot \frac{1}{3}$  (w)  $\varepsilon \cdot \frac{1}{3}$  uor $_{i_1}^{\varepsilon_1} u_1 \dots r_{i_n}^{\varepsilon_n} u_n$  ( $u_j \cdot \varepsilon \cdot \frac{S_2^*}{2}$ ), so liegt w - also auch w' - genau dann in  $A_1 \times A_2$ , wenn es ein reduziertes Wort v  $\varepsilon \cdot \frac{1}{3} r_{i_n}^{-\varepsilon_n} \dots x^{j_1} r_{i_1}^{-\varepsilon_1} x^{j_0}$  gibt mit vw' = e in  $G_3$ , d.h.  $x^{j_n} r_{i_n}^{-\varepsilon_n} \dots x^{j_1} r_{i_1}^{-\varepsilon_1} x^{j_0} u_0 r_{i_1}^{\varepsilon_1} u_1 \dots r_{i_n}^{\varepsilon_n} u_n = e$  in  $G_3$ . Da v und w' R-reduziert sind, gilt dann (falls  $\varepsilon_1 = 1$  ist),  $x^{j_0} u_0 \varepsilon \cdot A_{i_1} \times a_{i_1} v_0$  oder  $a_{i_1} u_0 = a_{i_1} u_0 \cdot a_{i_1} v_0 \cdot a_{i_1} v_0$  ersetzen und hat dadurch die R-Länge verkleinert. Ist die R-Länge gleich Null, so muß für das verbliebene Wort u  $a_{i_1} \cdot a_{i_1} v_0 \cdot a_{i_1} v_0 \cdot a_{i_1} v_0$  gelten. Mit diesen Überlegungen läßt sich leicht ein  $a_{i_1} \cdot a_{i_1} v_0 \cdot a$ 

<u>Lemma 6</u>. Es gibt eine Funktion g  $\epsilon$  E $_3$ ( $\underline{S}_3$ ), so daß für alle w  $\epsilon$   $\underline{S}_3^*$  gilt

- a) Es gibt ein u  $\epsilon \stackrel{R_X^*}{\underset{}{\times}}$  mit g(w) = uw in G<sub>3</sub>.
- b) Es gibt kein u  $\in \mathbb{R}_{\underline{X}}^*$ , so daß ug(w) einen Pinch  $r_i^{-\epsilon} v r_i^{\epsilon}$  auf der Grenze u g(w) enthält.

Lemma 6 besagt, daß man durch einen  $E_3$ -Prozeß in einem Wort  $w_\epsilon \underline{S_3^*}$  aller  $\epsilon$  R eliminieren kann, die durch Multiplikation eines Wortes u  $\epsilon$   $\underline{R_X^*}$  von links überhaupt eliminierbar sind. Analog lassen sich auch aller  $\epsilon$  R eliminieren, die von rechts eliminierbar sind.

Es ist jetzt gezeigt, daß Teil a) von Satz 1.3 gilt. Um den Teil b) zu beweisen geben wir zunächst drei vorbereitende Lemmata an, die das auf  $S_3^{\star}$  definierte Prädikat  $\Omega$ 

$$Q(u) \iff \exists w_0, w_1 \in R_x^* : w_0 u w_1 = q \text{ in } G_3$$

in Beziehung setzen zum speziellen Wortproblem P von  $\Gamma$ .

<u>Lemma 7</u>. Es sei  $w_0, w_1 \in \frac{R_x^*}{x}$ ,  $u \in \frac{S_3^*}{3}$ , u,  $w_0$  und  $w_1$  seien reduziert, und es gelte  $w_0 u w_1 = q$  in  $G_3$ . Dann gibt es  $w_0'$ ,  $w_0''$ ,  $w_1''$ ,  $w_1'' \in \frac{R_x^*}{x}$  und  $v \in \frac{S_2^*}{x}$ ,

so daß gilt

$$w_0'uw_1' = v \text{ in } G_3', \quad w_0''vw_1'' = q \text{ in } G_3'.$$

Lemma 7 besagt, daß man in u zunächst durch Multiplikation mit wound won links bzw. rechts alle r  $\epsilon$  R von u eliminieren kann. Mit Hilfe von g läßt sich v aus u in einem E $_3$ -Prozeß bestimmen.

<u>Lemma 9</u>. Es sei X,Y  $\epsilon$  S\*, q<sub>j</sub>  $\epsilon$  Q. Dann gilt Xq<sub>j</sub>Y = q in F genau dann, wenn es reduzierte Wörter w<sub>O</sub>,w<sub>1</sub>  $\epsilon$   $\frac{R_X^*}{x}$  gibt mit w<sub>O</sub> $\overline{X}$ q<sub>j</sub>Yw<sub>1</sub> = q in G<sub>4</sub>, d.h. P(Xq<sub>j</sub>Y) < Q( $\overline{X}$ q<sub>j</sub>Y).

Den Beweis zu Lemma 9 findet man in Rotman [8] (Seite 299-330 und Lemma 12.18). Die Lemmata 7 bis 9 besagen, daß die Prädikate P in  $\Gamma$  und Q in  $G_4$  von der gleichen Entscheidungskomplexität sind.

Wir nehmen jetzt an, daß das Prädikat P in F  $\underset{n}{\overset{}{\sim}} n^{-1}-\text{entscheidbar}$  ist.

<u>Lemma 10</u>.  $G_5$  ist eine  $E_n$ -zulässige Britton-Erweiterung von  $G_4$ . Es gibt also eine Reduktionsfunktion  $f_5$   $\epsilon$   $E_3(\underline{S_5})$ .

Beweis:  $G_5$  ist eine Britton-Erweiterung von  $G_4$  mit einem stabilen Buchstaben k. Setzt man  $\widetilde{A}=\widetilde{B}=R$  U  $\{x,\overline{q}tq\}$ , so braucht, wie bei Lemma 5, nur gezeigt zu werden, daß  $\{\widetilde{A}\}$  eine  $E_n$ -entscheidbare Untergruppe von  $G_4$  ist. Sei w  $\epsilon$   $S_4^{\underline{a}}$  und w'  $\equiv$   $f_4$  (w)  $\equiv$   $u_0$   $t^{\epsilon_1}u_1\dots t^{\epsilon_m}u_m$  mit  $u_i$   $\epsilon$   $S_3^{\underline{a}}$ . Es liegt w — also auch w' — genau dann in  $\{\widetilde{A}\}$ , wenn es ein Wort v  $\equiv$   $v_1$   $(\overline{q}tq)^{n_1}\dots v_1$   $(\overline{q}tq)^{n_1}v_0$   $(v_i$   $\epsilon$   $R_x^{\underline{a}})$  gibt mit v w' = e in  $G_4$ . Wählt man 1 minimal, so ist v t-reduziert, und es gilt m = 1 und  $m_i$  =  $-\epsilon_i$ , m = 1,2,...,m. Es gilt also w  $\epsilon$   $\{\widetilde{A}\}$  genau dann, wenn es  $v_0,\dots,v_m$   $\epsilon$   $R_x^{\underline{a}}$  gibt mit

$$v_m(\overline{q}tq)^{-\epsilon}m...v_1(\overline{q}tq)^{-\epsilon}v_0u_0t^{\epsilon}u_1...t^{\epsilon}mu_m = e \text{ in } G_4.$$

Da v und w' t-reduziert sind, muß dann qv u  $_{0}$   $_{0}$   $_{0}$   $_{0}$   $_{0}$   $_{0}$  delten, also auch  $q = v'u_{0}^{-1}v_{0}^{-1}$  in  $G_{3}$  mit  $v_{1}^{1}v_{0}^{-1}$   $_{0}$   $_{0}$   $_{0}$   $_{0}$  Dies ist äquivalent zu  $Q(u_{0}^{-1})$  und somit  $E_{n}$ -entscheidbar. Gilt  $Q(u_{0}^{-1})$ , so kann man  $(\overline{q}tq)^{-\epsilon}{}_{1}v_{0}u_{0}^{-\epsilon}$  durch  $v_{0}u_{0}$  ersetzen und hat damit die t-Länge verkleinert. Durch Induktion läßt sich zeigen

$$w \in \langle \widetilde{A} \rangle \iff Q(u_0^{-1}) \land Q((u_0u_1)^{-1}) \land \dots \land Q((u_0u_1 \dots u_m)^{-1}) \land u_0u_1 \dots u_m \in \langle A \rangle$$

Also ist  $\langle \widetilde{A} \rangle$  E<sub>n</sub>-entscheidbar und Lemma 10 ist bewiesen.

Wir haben jetzt gezeigt, daß das Wortproblem von  $G_5$  auf das spezielle Wortproblem von  $\Gamma$  reduzierbar ist. Das folgende Lemma von Boone liefert, daß umgekehrt das spezielle Wortproblem von  $\Gamma$  auf das Wortproblem von G reduzierbar ist.

<u>Lemma 11</u> (Boone). Für X,Y  $\epsilon$  S\*,  $q_j$   $\epsilon$   $\Omega$  gilt  $Xq_jY = q$  in F genau dann, wenn  $k(\overline{X}q_jY)^{-1}t(\overline{X}q_jY)^{-1}t(\overline{X}q_jY)^{-1}t(\overline{X}q_jY)k$  in  $G_5$ .

Ist das spezielle Wortproblem in  $\Gamma$  also nicht  $E_{n-1}$ -entscheidbar, so ist auch  $G_5$  nicht  $E_{n-1}$ -entscheidbar.  $G_5$  ist damit eine e.d.  $E_n \setminus E_{n-1}$ -entscheidbare Gruppe.

Es bleibt noch Satz 1.5 zu beweisen. Dazu bemerken wir, daß  $G_4$   $E_3$ -entscheidbar ist und daß die Untergruppe  $H = \langle \widetilde{A} \rangle$  in  $G_4$   $E_n$ - aber nicht  $E_{n-1}$ -entscheidbar ist. Die Gruppe  $G_4$  ist  $E_3$ -entscheidbar, unabhängig von der speziellen Wahl der TM-Halbgruppe. Geht man also aus von einer TM-Halbgruppe, in der das spezielle Wortproblem vom Unentscheidbarkeitsgrad D ist [1], so ist auch  $\langle \widetilde{A} \rangle$  in  $G_4$  vom Unentscheidbarkeitsgrad D.

#### Literatur

- [1] Boone W.W., Word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability. A sequel on finitely presented groups. Ann. of Math. 84 (1966), 49-84.
- [2] Cannonito F.B., Hierarchies of computable groups and the word problem. J. of Symb. Logic 31 (1966), 376-392.
- [3] Cannonito F.B., Gatterdam R.W., The computability of group constructions, Part I, in Word problems. North-Holland (1973), 365-400.
- [4] Davis M., Computability and unsolvability. Mac Graw Hill (1958).
- [5] Gatterdam R.W., The Higman theorem for  $E_n(A)$  computable groups, in Lecture Notes Math. 319, Springer (1973), 71-74.
- [6] von Henke, Weihrauch, Indermark, Hierarchies of primitive recursive wordfunctions and transductions defined by automata, in Nivat (Ed.), IRIA Symposium July 3-7 (1972).
- [7] Meyer A., Ritchie D., A classification of the recursive functions, Z. math. Logik, Grundlagen d. Math. 18 (1972), 71-82.
- [8] Rotman J.J., The theory of groups, 2. Edition, Allyn & Bacon (1973).
- [9] Weihrauch K., Teilklassen primitiv-rekursiver Wortfunktionen, GMD Berichte, Bonn, Nr. 91 (1974).