

ECLATEMENT DE CONTRAINTES EN PARALLELE
POUR LA MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE

Guy PIERRA

I.U.T. 1 INFORMATIQUE
Université G. BERNARD
43 boulevard du 11.11.1918
69621 VILLEURBANNE

Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université Scientifique et Médicale
de GRENOBLE

INTRODUCTION

On étudie ici le problème de la construction du projecteur sur une intersection de convexes d'un espace de Hilbert, c'est-à-dire, en changeant éventuellement de produit scalaire, celui de la minimisation de fonctionnelles quadratiques coercives.

Dans le cas où les convexes initiaux sont suffisamment simples, il peut être intéressant de décomposer le problème en sous-problèmes ne mettant chacun en jeu qu'un seul de ces convexes. De telles méthodes, consistant à "éclater les contraintes" [1], ont été proposées, en particulier, dans [2] et [4]. En associant comme dans [7], au problème posé sur une intersection de convexes, un problème équivalent posé sur le produit de ces convexes, on obtient ici, par décomposition, une méthode parallèle d'éclatement des contraintes.

Cette méthode est basée sur la réalisation, en parallèle, de projections sur chacun des convexes initiaux. Une extrapolation, [7], qui s'introduit naturellement dans le cadre de l'espace produit, permet d'affranchir l'algorithme des questions d'"angles" qui influencent beaucoup les méthodes habituelles de projections, et d'accélérer, très considérablement, la convergence.

A titre d'applications, on présente, dans une deuxième partie, et en utilisant un formalisme dû à [3], quelques méthodes de décomposition d'opérateurs dans des problèmes elliptiques.

Ce travail utilise largement les résultats obtenus dans [7]; il a été décrit de façon plus détaillée dans [8]; certains développements sont présentés dans [8] et [9].

Le plan est le suivant :

§ 1 - PROJECTION SUR INTERSECTION DE CONVEXES

- I . Position du problème
- II . Principe de la méthode
- III . Approximation extérieure d'une intersection de convexes
- IV . Description de la méthode
- V . Convergence

§ 2 - DECOMPOSITION D'OPERATEURS ELLIPTIQUES VIA UN ECLATEMENT PARALLELE
DE CONTRAINTES

- I . Exemples de problèmes
- II . Essais numériques

§ 1 - PROJECTION SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES :

I - POSITION DU PROBLEME :

Soient :

V un espace de Hilbert réel, identifié à son dual, de produit scalaire, norme et distance respectivement notés $(.,.)$, $\| . \|$, $d(.,.)$

$C_i \subset V$, $i=1, \dots, n$, des ensembles convexes fermés

$$C = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

$g \in V$ un élément donné.

On considère le problème :

(P) "Trouver $u \in V$ tel que $\| u-g \| = \min [\| v-g \| ; v \in C]$ " .

Nous supposerons que le problème n'est pas dégénéré et ferons les hypothèses :

$$(H1) \quad C = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$$

$$(H2) \quad g \notin C$$

Le problème (P) consiste à chercher la projection de g sur une intersection de convexes et nous nous proposons d'obtenir cette projection en utilisant des projections sur chacun des convexes C_i , $i=1, \dots, n$.

II - PRINCIPE DE LA METHODE :

1. Définitions :

Etant donné un couple ordonné a, b de points d'un espace de Hilbert X ,
On convient de noter :

$$H(a,b) = \{ v \in X, (v-b, b-a)_X \geq 0 \} .$$

On remarque que $H(a,a) = X$; Si $a \neq b$, $H(a,b)$ est un demi-espace fermé sur lequel b est la projection de a .

Etant donné un triplet ordonné de points a, b, c , d'un espace de Hilbert X , on note $Q(a,b,c)$ la projection de a sur $H(a,b) \cap H(b,c)$.

2. Théorème [2]

Etant donné un triplet ordonné de points a, b, c , d'un espace de Hilbert X , on note :

$$\lambda = (b-a, c-b)_X ; \mu = \|c-b\|_X^2 ; \nu = \|a-b\|_X^2 ; \eta = \mu\nu - \lambda^2 ;$$

les quatre éventualités suivantes constituent une partition des cas possibles :

- | | |
|---|---|
| 1. $\eta = 0$, $\lambda < 0$ | Alors $H(a,b) \cap H(b,c) = \emptyset$ |
| 2. $\eta = 0$, $\lambda \geq 0$ | Alors $Q(a,b,c) = \bar{c}$ |
| 3. $\eta \neq 0$, $\lambda\mu - \eta \geq 0$ | Alors $Q(a,b,c) = a + (1 + \frac{\lambda}{\mu})(c-b)$ |
| 4. $\eta \neq 0$, $\lambda\mu - \eta < 0$ | Alors $Q(a,b,c) = b + \frac{\mu}{\eta} (\nu(c-b) - \lambda(b-a))$ |

Ce théorème est démontré dans [2] dont on a conservé les notations.

3. Principe de la méthode :

L'idée de la méthode pour chercher la projection d'un point $g \in V$ sur un convexe $C \subset V$ est alors la suivante :

Supposons qu'à l'étape p de l'algorithme, nous connaissons un élément $u^p \in V$ tel que $H(g, u^p) \supset C$; On construit alors un nouveau demi-espace $H(u^p, b^{p+1})$ contenant C et l'on définit l'itéré suivant $u^{p+1} \in V$ par $u^{p+1} = Q(g, u^p, b^{p+1})$; cette projection étant calculée à l'aide du théorème II.2.

La définition des demi-espaces successifs, $H(u^p, b^{p+1})$ contenant C , va être obtenue, comme dans [7] en associant au problème (P) un problème équivalent posé dans un espace produit.

III - APPROXIMATION EXTERIEURE D'UNE INTERSECTION DE CONVEXES

On introduit maintenant [7] :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V \text{ doté de la topologie produit par le produit scalaire } ((.,.)) = \sum_{i=1}^n (.,.)_i$$

Sa norme et sa distance sont notées $\| \cdot \|$ et $d((.,.))$

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i \subset \mathcal{V}$$

et le convexe diagonal : $\mathcal{D} = \{ b = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{V} ; b \in V \}$.

Le convexe diagonal, \mathcal{D} , est isomorphe à V par la bijection j :
 $V \rightarrow \mathcal{D}$; $x \in V \rightarrow j(x) = (x, x, \dots, x) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{V}$. Nous n'identifierons pas V et \mathcal{D}
 et, pour alléger les notations, nous noterons l'image par j d'un élément de V par la
 lettre ronde correspondante ($j(b) = \mathcal{b}$; $j(x) = \mathcal{x} \dots$).

Rappelons ici quelques propriétés établies dans [7] :

1. Proposition :

L'image par j de l'intersection des n convexes C_i est l'intersection du
 convexe produit \mathcal{C} et du convexe diagonal \mathcal{D} :

$$j\left(\bigcap_{i=1}^n C_i\right) = \mathcal{C} \cap \mathcal{D} .$$

2. Proposition :

(i) La projection d'un point $\mathcal{b} = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{D}$ sur \mathcal{C} a pour composantes
 les projections de b sur chacun des convexes C_i :

$$\text{Proj}_{\mathcal{C}} \mathcal{b} = (\text{Proj}_{C_1} b, \text{Proj}_{C_2} b, \dots, \text{Proj}_{C_n} b)$$

(ii) La projection d'un point $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}$ sur \mathcal{D} est l'image par j
 du barycentre des n points v_1, v_2, \dots, v_n :

$$\text{Proj}_{\mathcal{D}} v = j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \right)$$

3. Nouvelle formulation du problème (P) :

Si l'on note donc $\mathcal{g} = j(g) = (g, g, \dots, g)$, il résulte de la définition
 de la norme de \mathcal{V} que le problème (P) est équivalent, dans \mathcal{V} , au problème :

(P') "Trouver $u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ tel que

$$\| \| u - \mathcal{g} \| \|^2 = \min [\| \| v - \mathcal{g} \| \|^2 ; v \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}] "$$

Nous nous proposons d'utiliser, pour résoudre le problème (P'), l'idée
 de l'algorithme II.3 et définissons donc une méthode de constructions successives
 de demi-espace contenant $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Donnons, tout d'abord, un résultat préliminaire :

4. Lemme :

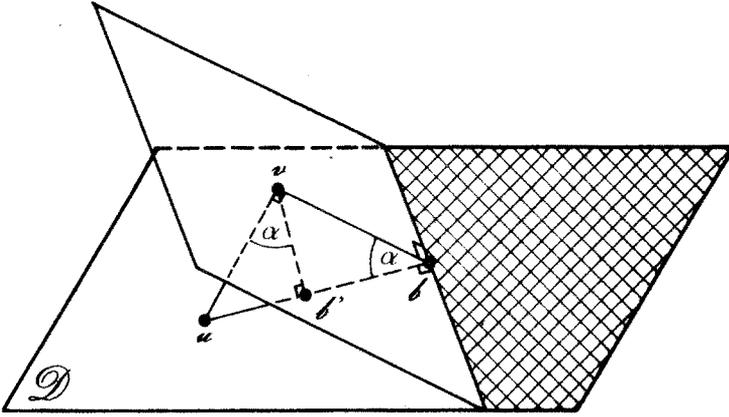


Figure 1

Etant donné un couple $(u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{V}$ et en notant b' la projection de v sur \mathcal{D} :

1. Si $u = b' = v$, alors $\mathcal{D} \cap H(u, v) = \mathcal{D}$
2. Si $u = b' \neq v$, alors $\mathcal{D} \cap H(u, v) = \emptyset$
3. Si $u \neq b'$, alors on définit - cf. [7] - l'extrapolé b par :

$$b = b' + \frac{\|b' - v\|^2}{\|b' - u\|^2} (b' - u) = u + \frac{\|v - u\|^2}{\|b' - u\|^2} (b' - u)$$

et les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $x \in \mathcal{D} \cap H(u, v)$
- ii) $x \in \mathcal{D} \cap H(u, b)$

La démonstration, très simple, de ce lemme est basée sur l'égalité des deux angles notés α dans la figure. Elle est donnée dans [8].

Le lemme précédent nous donne un procédé constructif de demi-espaces successifs contenant l'ensemble, non vide d'après l'hypothèse (H1), $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Considérons, en effet, un élément $u \in \mathcal{D}$; $u \notin \mathcal{C}$. De l'application au couple $(u, \text{Proj}_{\mathcal{C}} u)$ du lemme III.4, on déduit immédiatement le théorème :

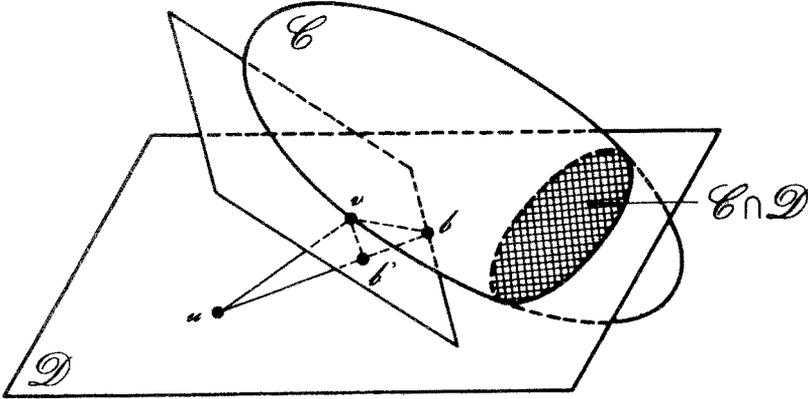


Figure 2

5. Théorème d'extrapolation dans \mathcal{V} :

On suppose maintenant que l'hypothèse (H1) est vérifiée, et l'on considère un élément $u \in \mathcal{D}$. Si $u \notin \mathcal{C}$, on définit :

$$v = \text{Proj}_{\mathcal{C}} u$$

$$b' = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v$$

$$b = u + \frac{\|v-u\|^2}{\|b'-u\|^2} (b'-u),$$

et l'on a :

- i) $b' \neq u$
- ii) $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{D} \cap H(u, b)$.

Si nous exprimons dans l'espace \mathcal{V} le théorème d'extrapolation, il vient, compte tenu de la proposition III.2 :

6. Théorème d'extrapolation dans V :

L'hypothèse (H1) étant vérifiée, on considère un élément

$$u \in V ; u \notin \bigcap_{i=1}^n C_i .$$

On définit :

$$v_i = \text{Proj}_{C_i} u \quad , i=1, \dots, n$$

$$b' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

$$b = u + \frac{\sum_{i=1}^n \|u - v_i\|^2}{n \|b' - u\|^2} \cdot (b' - u)$$

et l'on a :

$$i) \quad b' \neq u$$

$$ii) \quad C = \bigcap_{i=1}^n C_i \subset H(u, b) .$$

IV - DESCRIPTION DE LA METHODE :

Supposons donc qu'à l'étape p-1 de l'algorithme, nous connaissions $u^{p-1} \in \mathcal{D}$ tel que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset H(g, u^{p-1})$.

Si $u^{p-1} \in \mathcal{C}$, il est clair que u^{p-1} est solution de (P')

Si $u^{p-1} \notin \mathcal{C}$, on construit alors une nouvelle approximation extérieure $H(u^{p-1}, h^p) \supset \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ par application du théorème III.5 et l'on définit le nouvel itéré u^p par :

$$u^p = Q(g, u^{p-1}, h^p) .$$

Nous pouvons maintenant décrire, dans l'espace V, l'algorithme proposé :

1. Algorithme :

Partant de $u^0 = g$, le passage de u^{p-1} à u^p s'effectue de la façon suivante :

1) On calcule pour $i=1, \dots, n$

$$v_i^p = \text{Proj}_{C_i} u^{p-1}$$

si $v_i^p = u^{p-1}$, $i=1, \dots, n$, on pose $u = u^{p-1}$ et on stoppe l'algorithme sinon :

2) On définit :

$$b^p = \frac{1}{n} \sum v_i^p$$

et l'extrapolé :

$$b^p = u^{p-1} + \frac{\sum \|v_i^p - u^{p-1}\|^2}{n \|b^p - u^{p-1}\|^2} (b^p - u^{p-1}) . \quad (A)$$

3) On calcule alors :

$$u^p = Q(g, u^{p-1}, b^p) .$$

Puisque $u^0 = g$, $H(g, u^0) = V \supset C$, on en déduit donc, par récurrence sur p que $H(g, u^{p-1}) \supset C$. Il résulte alors du théorème d'extrapolation III.6 que si $u^{p-1} \notin C$, alors $u^{p-1} \neq b^p$ et $H(g, u^p) \supset C$.

2. Remarques

1) Comme dans [7] (cf. [7], I §6) l'on peut, en modifiant la définition de la norme de \mathcal{P} , faire intervenir, au lieu de b^p , un barycentre pondéré.

2) De même, il est possible de ne pas effectuer à chaque pas tout ou partie de l'extrapolation, c'est-à-dire de prendre pour certaines valeurs de p :

$$b^p = u^{p-1} + [1 + \rho \left(\frac{\sum \|v_i^p - u^{p-1}\|^2}{n \|b^p - u^{p-1}\|^2} - 1 \right)] (b^p - u^{p-1}) ; 0 \leq \rho \leq 1$$

3) On vérifie — cf. [8] lemme II.3.5 — que lorsque u^{p-1} appartient à certains des convexes C_i , il suffit, pour calculer l'extrapolé b^p , d'appliquer la formule (A) au seuls n' convexes ($n' < n$) auxquels u^{p-1} n'appartient pas.

3. Remarque

Lorsque les projections sur chacun des convexes C_i ne peuvent pas être obtenues facilement, on peut, en associant à la méthode précédente un croisement d'algorithmes, linéariser, à chaque pas, les contraintes. Cette méthode est présentée dans [8] .

V - CONVERGENCE

On a le résultat suivant :

1. Théorème :

Les hypothèses (H1) et (H2) étant supposées vérifiées, si la suite $\{u^p\}$ définie par l'algorithme IV.1 est finie, son dernier élément est solution de (P) ; si la suite est infinie, elle converge fortement vers la solution de (P).

Démonstration :

Si la suite $\{u^p\}$ est finie, cela signifie que $u^p \in C$; et puisque $C \subset H(g, u^p)$ on en déduit que u^p est solution de (P). Supposons donc la suite $\{u^p\}$ infinie.

1) La suite $\{\|u^p - g\|\}$ est convergente.

En effet, par définition de u^p , $u^p \in H(g, u^{p-1})$. La suite $\{\|u^p - g\|\}$ est donc non décroissante. De plus, puisque $H(g, u^p) \supset C \neq \emptyset$, cette suite est bornée ; elle est donc convergente.

On en déduit en particulier :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\|u^{p-1} - g\|^2 - \|u^p - g\|^2] = 0 ,$$

et, puisque $u^p \in H(g, u^{p-1})$, $(u^p - u^{p-1}, u^{p-1} - g) \geq 0$, d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - u^{p-1}\|^2 = 0 ;$$

de même, puisque $u^p \in H(u^{p-1}, b^p)$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - b^p\|^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - l^p\|^2 = 0 . \quad (A)$$

$$2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - v^p\|^2 = 0$$

Appliquant le lemme III.4 au couple (u^{p-1}, v^p) , on obtient :

$$l^p \in H(u^{p-1}, v^p) .$$

Les propriétés des projections impliquent donc, compte tenu de (A) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - v^p\|^2 = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - v_i^p\|^2 = 0 , \quad i=1, \dots, n . \quad (B)$$

3) Convergence de la suite :

La suite $\{u^p\}$ étant bornée, il existe une sous-suite, notée $\{u^q\}$, convergeant faiblement vers un élément $u \in V$. De la faible s.c.i. de la distance à un convexe on déduit, compte tenu de (B), que $u \in C$.

Enfin, puisque $C \subset H(g, u^p)$:

$$\|u^{p-1} - g\| \leq \|u^p - g\| \leq \|x - g\| \quad , \quad \forall x \in C, \forall p \in \mathbb{N},$$

et l'on déduit alors de la faible s.c.i. de la norme, selon un argument classique, et pour toute la suite $\{u^p\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \text{Proj}_C g \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - g\| = \|u - g\| \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \|u - u^p\| = 0, \end{array} \right.$$

ce qui établit le théorème.

§ 2 - DECOMPOSITION D'OPERATEURS ELLIPTIQUES VIA UN ECLATEMENT PARALLELE

DE CONTRAINTES :

La traduction de certains problèmes elliptiques sous la forme de problème (P) - cf. § 1 - est effectuée ici en utilisant un formalisme de Y. HAUGAZEAU [3]. Le problème posé, par exemple, sur $H^1(\Omega)$, est transformé en un problème dans un espace V qui est une puissance de $L^2(\Omega)$, et dans lequel $H^1(\Omega)$ est plongé. L'approximation est effectuée à partir d'éléments de $[L^2(\Omega)]^T$, il s'agit donc d'une approximation externe, et l'appartenance de la solution à $H^1(\Omega)$ se traduit, dans le nouveau problème, par une introduction de contraintes. L'utilisation de l'algorithme précédent, avec traitement parallèle des contraintes, correspond, au niveau du problème initial, à une décomposition en parallèle de l'opérateur elliptique. Cette décomposition est de même type que celle utilisée dans la méthode des directions alternées [11] ou dans la méthode de décomposition de [1] et entraîne une convergence assez rapide.

Je remercie Monsieur Y. HAUGAZEAU pour d'utiles conversations concernant cette partie et Monsieur R. CHIFFLET pour sa participation aux essais numériques.

Nous présentons ici deux exemples d'applications de la méthode, l'un pour un problème linéaire l'autre pour un problème non linéaire, ainsi que quelques remarques sur des essais numériques. D'autres exemples ainsi que l'ensemble des essais numériques effectués seront présentés par ailleurs.

I - EXEMPLES DE PROBLEMES

1. Problème de Neumann

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n , de frontière Γ . On cherche à minimiser, sur $H^1(\Omega)$, la fonctionnelle :

$$(M) \quad J(v) = \lambda \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \lambda > 0$$

avec f donnée dans $L^2(\Omega)$.

Il s'agit - cf. [3],[10] - du classique problème de Neumann :

$$(N) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + \lambda u = f & \text{pp dans } \Omega \\ \gamma_1 u = 0 & \text{pp sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Nous noterons $(.,.)$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme de $L^2(\Omega)$.
On introduit alors l'espace :

$$V = [L^2(\Omega)]^{n+1} = \{(v_0, v_1, \dots, v_n) ; v_i \in L^2(\Omega) ; i=0, \dots, n\}$$

doté de la topologie produit, et, en notant A_i , $i=1, \dots, n$, l'opérateur :

$$v_0 \in L^2(\Omega) \rightarrow \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) ,$$

les sous-ensembles convexes fermés de V :

$$C_i = \{v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in V ; v_i = A_i v_0\} \quad i=1, \dots, n .$$

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans V :

$$y \in H^1(\Omega) \rightarrow (y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n})$$

est une isométrie de $H^1(\Omega)$ et de $\bigcap_{i=1}^n C_i$ dans V doté du produit scalaire

$$\langle\langle ., . \rangle\rangle = \sum_{i=1}^n (.,.) .$$

On vérifie facilement - cf. [10] - que la forme bilinéaire sur $V \times V$:

$$a(u, v) = \lambda(u_0, v_0) + \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)$$

est, avec λ strictement positif, continue et coercive sur V dotée de la métrique précédente. Elle définit donc un nouveau produit scalaire que nous noterons $((.,.))$, et une norme notée $\|\|\| \cdot \|\|\|$.

Le problème (M) devient :

$$\text{"Trouver } u \in C = \bigcap_{i=1}^n C_i \subset V \text{ tel que } F(u) = \min [F(v) ; v \in C] \text{"}$$

$$\text{avec : } F(v) = \lambda \|v_0\|^2 + \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 - 2(f, v_0) ;$$

ou encore, en introduisant :

$$g = (\frac{1}{\lambda} f, 0, \dots, 0) \in V :$$

$$\text{"Trouver } u \in \bigcap_{i=1}^n C_i \text{ tel que } \|\|\| u - g \|\|\|^2 = \min [\|\|\| v - g \|\|\|^2 ; v \in \bigcap_{i=1}^n C_i] \text{" ,}$$

c'est-à-dire la recherche de la projection de g sur l'intersection des convexes C_i , $i=1, \dots, n$. Nous appliquons donc à ce problème l'algorithme IV.1 du § 1.

On vérifie facilement - cf. [8] - les formules de calcul des projections sur les ensembles C_i , $i=1, \dots, n$. En prenant, pour fixer les idées, $n = 2$, l'algorithme est alors le suivant :

Algorithme :

Partant de $v^0 = g$, le passage de v^{p-1} à v^p se fait de la façon suivante :

1) On calcule $x^p = \text{Proj}_{C_1} v^{p-1}$ c'est-à-dire :

$$x_0^p = (\lambda I + A_1^* A_1)^{-1} (\lambda v_0^{p-1} + A_1^* v_1^{p-1})$$

$$x_1^p = A_1 x_0^p$$

$$x_2^p = v_2^{p-1}$$

et $y^p = \text{Proj}_{C_2} v^{p-1}$:

$$y_0^p = (\lambda I + A_2^* A_2)^{-1} (\lambda v_0^{p-1} + A_2^* v_2^{p-1})$$

$$y_1^p = v_1^{p-1}$$

$$y_2^p = A_2 y_0^p.$$

2) On coordonne en calculant :

$$b^p = \frac{1}{2} (x^p + y^p)$$

et l'on extrapole :

$$b^p = v^{p-1} + \rho (b^p - v^{p-1})$$

avec

$$\rho = \frac{\lambda (\|x_0^p - v_0^{p-1}\|^2 + \|x_1^p - v_1^{p-1}\|^2 + \lambda \|y_0^p - v_0^{p-1}\|^2 + \|y_2^p - v_2^{p-1}\|^2)}{2(\lambda \|b_0^p - v_0^{p-1}\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|b_i^p - v_i^{p-1}\|^2)}$$

3) Enfin, on calcule v^p par :

$$v^p = Q(g, v^{p-1}, b^p).$$

Du théorème V du § 1 on déduit :

Proposition :

$$v_0^p \rightarrow u \quad \text{solution de (N) dans } L^2(\Omega) \text{ Fort}$$

$$v_i^p \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ Fort}$$

Remarques :

1) Si la discrétisation est effectuée par différence finie en utilisant les méthodes classiques d'approximations - cf. [10] , [11] - le calcul de x_0^p - ainsi que celui de y_0^p - demande la résolution d'un système linéaire, découplé par lignes du domaine, et dont la matrice tri-diagonale est d'inversion tout à fait standard. Ces systèmes, qui doivent être résolus à chaque itération, sont les mêmes que ceux rencontrés dans la méthode des directions alternées [11] ou dans celle des pas fractionnaires [10] , [11] .

2) La projection $Q(g, v^{p-1}, b^p)$ effectuée selon le théorème (§ 1, II.2) demande seulement le calcul d'un produit scalaire, les autres paramètres résultant de calculs précédents.

3) L'extension de l'algorithme au cas $n = 3$ est immédiate.

2. Un problème non linéaire - cf. [5] - :

On en donnera seulement les grandes lignes. Il s'agit du problème aux limites :

$$(M) \quad \left\{ \begin{array}{ll} - \Delta u + u + 2 u^3 = f & \text{pp. dans } \Omega \\ \gamma_1 u = 0 & \text{pp. sur } \Gamma , \end{array} \right.$$

qui se traduit, sur l'espace $W = L^4(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, par le problème d'optimisation :

(Q) "Trouver $u \in W$ tel que $J(u) = \min [J(v) ; v \in W]$ "

$$\text{avec} \quad J(v) = \|v\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 + \|v^2\|^2 - 2(f, v)$$

en notant, à nouveau, $\|\cdot\|$ et (\cdot, \cdot) la norme et le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, et avec f donné dans $L^2(\Omega)$.

Si l'on introduit $V = [L^2(\Omega)]^{n+2}$ et l'injection de W dans V :

$$v \in W \rightarrow (v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, v^2),$$

on démontre - cf. [3] - que le problème (Q) est équivalent, en notant $\| \cdot \|$,

$$\| \cdot \|'^2 = \sum_{i=0}^{n+1} \| \cdot \|'^2, \text{ la norme de } V \text{ et } g = (f, 0, \dots, 0), \text{ au problème :}$$

$$(Q') \quad \text{"Trouver } u \in C = \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i \text{ tel que } \| \| u-g \| \|'^2 = \min [\| \| v-g \| \|'^2 ; v \in C] \text{ " ,}$$

avec :

$$C_i = \{ (v_0, v_1, \dots, v_{n+1}) \in V ; v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \} \quad i=1, \dots, n ,$$

$$C_{n+1} = \{ (v_0, v_1, \dots, v_{n+1}) \in V ; v_{n+1}(x) \geq v_0^2(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega \} \quad :$$

c'est-à-dire à un problème de projection sur une intersection de convexes auquel la méthode de la première partie s'applique.

II - ESSAIS NUMERIQUES

Nous avons considéré deux problèmes de Neumann très voisins qui avait déjà été traité, le premier, dans [10], par la méthode des pas fractionnaires, le second dans [5] par les méthodes de Cholewski, relaxation par blocs et coordination.

Il s'agit des deux problèmes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + 2u = f & \text{p.p. dans } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 & \text{p.p. sur } \Gamma \\ f = (2\pi^2 + 2) \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 & \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{p.p. dans } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 & \text{p.p. sur } \Gamma \\ f = (2\pi^2 + 1) \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 & \end{array} \right.$$

La solution de ces deux problèmes est : $u = \cos \pi x_1 \cos \pi x_2$.

Quelques remarques :

1 - Le passage de la forme (1) à la forme (2) du problème se traduit , après discrétisation par différences finies, par une modifications de la "dominance" de la diagonale de la matrice du système. Cette modification n'a aucune influence sur le comportement de notre méthode : les éléments itérés sont les mêmes, seuls changent les coefficients d'extrapolation.

2 - Dans tous les exemples étudiés, la convergence semble extrêmement rapide pour les premières itérations. Ainsi pour les problèmes (1) et (2) la solution est atteinte en une itération. Par la suite, et au voisinage immédiat de la solution, des oscillations légères peuvent se produire, sur la valeur de l'erreur relative ; la décroissance du paramètre $\mu = \|b^p - u^{p-1}\|$ est par contre toujours monotone.

3 - Bien que non indispensable, le travail en double précision accroît significativement l'efficacité de la méthode.

4 - C'est l'extrapolation qui fait la rapidité de la méthode. Dans le cas où l'extrapolation n'est pas effectuée (méthode du barycentre) les résultats pour le problème (1) avec un pas de discrétisation de 1/20 ont été les suivants. On a calculé l'erreur relative :

$$e = \frac{\sum | \text{valeur calculée au point } (i,j) - \text{solution } (i,j) |}{\sum | \text{solution } (i,j) |}$$

Itérations	avec extrapolation	sans extrapolation
N = 1	$e = 1.8665 \times 10^{-3}$ *	$e = 0.8346$
N = 40	$e = 1.8665 \times 10^{-3}$	$e = 9.2453 \times 10^{-3}$

* L'erreur 1.86×10^{-3} est l'erreur due à la discrétisation.

Résultats

1 - Nous donnons les résultats du problème (2) avec un pas de $h = 1/40$

Méthode	Coordination (α) (éléments finis)	Cholewski (α)	Relax-bloc (α)	Eclatement (β) parallèle
Erreur	$4,9 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-4}$	$4,6 \times 10^{-4}$
temps de calcul	3 sec.	3,22 sec.	5 sec.	3,1 sec.
place mémoire	180 K	660 K	180 K	35 K

(α) donnés dans [5] , calculs effectués sur IBM 360-91.

(β) calculs effectués en D.P. sur IRIS 80 (plusieurs fois moins rapide).

2 - Pour le problème (1), le nombre d'itération nécessaire pour la méthode des pas fractionnaires dépend d'un paramètre τ . cf [10]. Le temps d'une itération de pas fractionnaire est environ 20 % inférieur à celui d'une itération d'éclatement en parallèle. Le nombre d'itération pour assurer la convergence des deux méthodes est de :

Méthode	$h = 1/10$	$h = 1/20$
Pas fractionnaire cf. [10]	$N \gg 5$ (dépend de τ)	$N \gg 5$
Eclatement parallèle	$N = 1$	$N = 1$

REFERENCES

- [1] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, R. TEMAM : "Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordination, et applications".
Cahier IRIA, N° 11 (1972) 5-190.
- [2] Y. HAUGAZEAU : Thèse, Paris (1968).
- [3] Y. HAUGAZEAU : Communication au Colloque d'Anglet, (juin 1971).
- [4] P.J. LAURENT, B. MARTINET : "Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes".
Symposium on Optimisation, Nice (1969) in Lect. Notes Math. 132, Springer Verlag, Berlin (1970), 159-180.
- [5] P. LEMONNIER : "Résolution numérique d'équations aux dérivées partielles par décomposition et coordination".
Cahier IRIA, n° 11 (1972), 191-239.
- [6] J.L. LIONS, E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes et applications"
Dunod, Vol.1, Paris (1968).
- [7] G. PIERRA : "Méthodes de projections parallèles extrapolées relatives à une intersection de convexes".
Rapport de Recherche N° 7, Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble (1975). (À paraître).
- [8] G. PIERRA : "Projection sur une intersection de convexes et applications".
Rapport de Recherche N° 9, Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble (1975).
- [9] G. PIERRA : "Une nouvelle méthode de programmation quadratique".
Rapport de Recherche N° 10, Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble, (1975).
- [10] R. TEMAM : "Analyse Numérique".
P.U.F., Paris (1970)
- [11] R.S. VARGA : "Matrix iterative analysis".
Prentice Hall (1962).