

Mathematik Kompakt

Herausgegeben von:

Martin Brokate

Heinz W. Engl

Karl-Heinz Hoffmann

Götz Kersting

Gernot Stroth

Emo Welzl

Die neu konzipierte Lehrbuchreihe *Mathematik Kompakt* ist eine Reaktion auf die Umstellung der Diplomstudiengänge in Mathematik zu Bachelor- und Masterabschlüssen. Ähnlich wie die neuen Studiengänge selbst ist die Reihe modular aufgebaut und als Unterstützung der Dozierenden sowie als Material zum Selbststudium für Studierende gedacht. Der Umfang eines Bandes orientiert sich an der möglichen Stofffülle einer Vorlesung von zwei Semesterwochenstunden. Der Inhalt greift neue Entwicklungen des Faches auf und bezieht auch die Möglichkeiten der neuen Medien mit ein. Viele anwendungsrelevante Beispiele geben den Benutzern Übungsmöglichkeiten. Zusätzlich betont die Reihe Bezüge der Einzeldisziplinen untereinander.

Mit *Mathematik Kompakt* entsteht eine Reihe, die die neuen Studienstrukturen berücksichtigt und für Dozierende und Studierende ein breites Spektrum an Wahlmöglichkeiten bereitstellt.

Diskrete Mathematik

Grundlagen und Methoden

Anusch Taraz

Autor:

Anusch Taraz

Zentrum Mathematik

Technische Universität München

Garching, Deutschland

ISBN 978-3-7643-8898-0

ISBN 978-3-7643-8901-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-7643-8901-7

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

2011 Mathematical Subject Classification: 05-01, 05Axx, 05Cxx, 05Dxx, 06A07, 68Q87, 68Rxx

© Springer Basel AG 2012

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechts.

Satz und Layout: Protago-TeX-Production GmbH, Berlin, www.ptp-berlin.eu

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Printed in Germany

Springer Basel AG ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

www.birkhauser-science.com

Vorwort

Die *Diskrete Mathematik* hat sich ihren Namen dadurch verdient, dass die von ihr studierten Objekte eine gewisse *Distanz* zueinander wahren. Sie ist das Gegenstück zur kontinuierlichen Mathematik, deren Objekte unendlich nahe beieinander liegen können. Die Standardbeispiele, die diese beiden Welten veranschaulichen und denen wir oft begegnen, sind die *ganzen Zahlen* einerseits und die *reellen Zahlen* andererseits. Diese Unterscheidung in diskret und kontinuierlich mag auf den ersten Blick künstlich und marginal erscheinen, erfordert aber in vielen Fällen sehr unterschiedliche Ansätze und Methoden. Wir beginnen mit drei diskreten Beispielen.

Landkarten färben. Angenommen, wir haben eine politische Landkarte mit mehreren Ländern, wobei wir vereinfachend voraussetzen, dass jedes Land ein zusammenhängendes Gebilde ist. Unser Ziel ist es, die Länder so mit verschiedenen Farben auszumalen, dass *benachbarte Länder nicht die gleiche Farbe erhalten* und wir trotzdem *so wenige Farben wie möglich* verwenden. Ein Beispiel findet sich in Abb. 1.



Abb. 1: Eine Färbung der 16 Bundesländer. Vier Farben genügen – und vier Farben braucht man auch, weil der Fünf-Länder-Ring um Thüringen herum schon drei Farben erfordert und Thüringen dann eine vierte benötigt.

Gibt es eine Landkarte, für deren Färbung man mehr als vier Farben benötigt? Seit der Mitte des 19. Jahrhunderts glaubte man, dass tatsächlich *jede Landkarte mit höchstens vier Farben* gefärbt werden kann. Diese Vermutung und die durch sie angetriebene

Entwicklung neuer Methoden erwiesen sich als ein starker Motor innerhalb der Diskreten Mathematik – auch wenn es trotzdem bis zur zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts dauerte, bis diese Vermutung bewiesen wurde. Wir werden uns in Abschnitt 13 mit diesem Thema näher befassen.

Triangulierungen zählen. Angenommen, wir haben ein regelmäßiges n -Eck, bei dem die n Ecken mit den Zahlen 1 bis n markiert sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Figur durch Verbindungslinien zwischen verschiedenen Eckpunkten in nicht-überlappende Dreiecke aufzuteilen? Eine solche Aufteilung in Dreiecke nennt man auch *Triangulierung*. Fangen wir zunächst einfach an: Bei einem 4-Eck gibt es genau 2 Möglichkeiten, bei einem 5-Eck sind es schon 5, siehe Abb. 2.

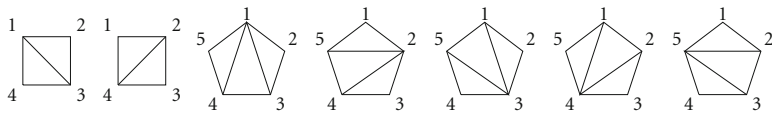


Abb. 2: Alle Triangulierungen eines 4-Ecks und eines 5-Ecks

Wenn wir nun zu dem 6-Eck übergehen, dann ist klar, dass in jeder Triangulierung die Seite zwischen den Ecken 5 und 6 in genau einem Dreieck mit einer weiteren Ecke liegen muss. Wir können also die Triangulierungen des 6-Ecks in vier Klassen teilen, und zwar je nachdem, ob die Seite zwischen 5 und 6 mit der Ecke 1 ein Dreieck bildet oder mit der Ecke 2 oder mit der Ecke 3 oder mit der Ecke 4 (siehe auch Abb. 3).

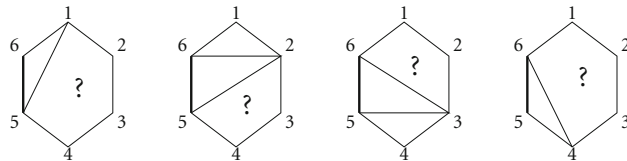


Abb. 3: Vier verschiedene Klassen von Triangulierungen eines 6-Ecks

Wie viele Triangulierungen gibt es in der ersten Klasse? Hier ist noch das 5-Eck mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5 zu triangulieren, und dafür gibt es, wie wir oben schon festgestellt haben, genau 5 Möglichkeiten. In der zweiten Klasse ist nur noch das 4-Eck mit den Ecken 2, 3, 4, 5 zu triangulieren, und dafür gibt es, wie ebenfalls schon festgestellt, genau 2 Möglichkeiten. Mit der dritten und vierten Klasse kann man dann analog verfahren und erhält insgesamt $5 + 2 + 2 + 2 = 14$ Möglichkeiten.

Was lernen wir daraus für ein n -Eck? Es ist tatsächlich nicht einfach, eine explizite Funktion für die Anzahl der Triangulierungen in Abhängigkeit von n zu finden, aber man kann relativ schnell eine Formel angeben, die die Anzahl der Triangulierungen eines n -Ecks in Beziehung zur Anzahl für m -Ecke mit $m < n$ setzt – man nennt das dann eine *Rekursionsformel*.

In Abschnitt 7 werden wir lernen, wie man aus einer solchen Rekursionsformel eine explizite Formel ableitet. Auf diese Weise kann man dann zeigen, dass es genau

$$\frac{(2n - 4) \cdot (2n - 5) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n - 1) \cdot (n - 2)^2 \cdot (n - 3)^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2}$$

Triangulierungen eines regelmäßigen n -Ecks gibt. Diese Zahl nennt man die n -te *Catalan-Zahl*, und sie zählt nicht nur Triangulierungen, sondern beispielsweise auch die Anzahl von monotonen Wegen in Gittern oder korrekt geklammerten Termen.

Paare bilden. Angenommen, wir haben eine Menge von 1000 Frauen und 1000 Männern. Wir nehmen an, dass alle Frauen und Männer unverheiratet seien und dass zu jedem Frau-Mann-Paar bekannt sei, ob sie sich gegenseitig kennen oder nicht. Die Frage lautet nun: Können wir 1000 Frau-Mann-Paare so bilden – nennen wir sie *Ehepaare* –, dass jede Frau und jeder Mann zu genau einem Ehepaar gehört *und jeder seinen Ehepartner kennt*?

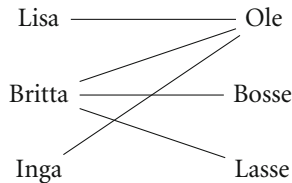


Abb. 4: Schwierige Konstellation: Inga und Lisa kennen nur Ole

Offensichtlich kann das nur funktionieren, wenn jede Frau mindestens einen Mann kennt. Außerdem darf es keine zwei Frauen geben, die den gleichen Mann *und sonst keinen anderen* kennen. Und keine drei Frauen dürfen sich auf insgesamt zwei oder weniger Männer begrenzen. Um es allgemeiner und positiv zu formulieren: Es ist klar, dass jede Teilmenge von Frauen insgesamt mindestens so viele Männer kennen muss, wie sie Frauen enthält, sonst gelingt es nicht (siehe den in Abb. 4 beschriebenen Fall). Umso überraschender: Der sogenannte *Heiratssatz* besagt, dass diese Bedingung bereits genügt, um ein derartiges *perfektes Matching* zu garantieren. Wir werden diese Strukturen in Abschnitt 12 näher untersuchen und den genannten Satz dort beweisen.

Das Vierfarbenproblem, das Abzählproblem der Triangulierungen und das Heiratsproblem sind diskrete Probleme, denn zwei verschiedene Färbungen einer Landkarte unterscheiden sich in der Farbe mindestens eines Landes, zwei verschiedene Triangulierungen unterscheiden sich in mindestens einer Diagonale, und zwei verschiedene Paarungen unterscheiden sich in mindestens einem Paar – diese Objekte wahren also tatsächlich einen gewissen Abstand voneinander.

Es gibt viele derartige Fragestellungen in der Diskreten Mathematik, die mit einem kleinen Vokabular leicht zu formulieren sind, sich aber nur schwer lösen lassen und dadurch anscheinend den Charakter einer „Knobelaufgabe“ haben. Diese Fragen sind aber nicht voneinander isoliert, sondern durch ausgefeilte Theorie-Gebäude miteinander verknüpft. Und diese Theorien, beispielsweise in der Graphentheorie, der Kombinatorik oder der Diskreten Geometrie, haben sich wiederum als äußerst relevant für wichtige Teilgebiete der Mathematischen Optimierung und der Theoretischen Informatik erwiesen. Es überrascht daher nicht, dass die Diskrete Mathematik in zunehmendem Maße Einzug in den Fächerkanon der ersten Studienjahre von Bachelor-Studiengängen in Mathematik und Informatik gehalten hat.

Das vorliegende Lehrbuch versucht, eine Grundlage für derartige Kurse bereitzustellen. Es basiert auf Vorlesungen, die der Autor an der Technischen Universität München gehalten hat, und ist für Studierende der Mathematik in den ersten Studienjahren gedacht. Vorkenntnisse außerhalb der Schulmathematik werden nicht vorausgesetzt. An drei Stellen werden Brücken zwischen Diskreter Mathematik einerseits und Analysis, Linearer Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung andererseits geschlagen – die

sich auch dann verstehen lassen sollten, wenn die Fachgebiete auf der anderen Seite der Brücke erst später im Studium behandelt werden.

Nun zu einigen genaueren Anmerkungen über den Aufbau dieses Lehrbuchs. Die erste Hälfte des Buches (Kapitel I bis III) trägt einige der Kerninhalte der Diskreten Mathematik zusammen. Im ersten Kapitel werden allgemeine mathematische *Grundlagen* behandelt und die üblichen Methoden und die Terminologie für Mengen und Mengenoperationen, Relationen und vollständige Induktion etabliert. Jenseits des ersten Semesters sollte man dieses Kapitel problemlos überspringen können. Das zweite Kapitel enthält Resultate und Techniken zum *Zählen* diskreter Objekte wie beispielsweise doppeltes Abzählen, Inklusion-Exklusion, Zählformeln für Teilmengen und Partitionen, erzeugende Funktionen und asymptotisches Zählen. Das dritte Kapitel befasst sich mit *relationalen Strukturen* wie Graphen und Ordnungen und untersucht in diesen Strukturen Euler-Touren und Hamilton-Kreise, Matchings und Färbungen sowie Ketten und Antiketten. Insgesamt sollte man diesen Block im Rahmen einer zweistündigen Vorlesung bequem behandeln können.

Die zweite Hälfte des Buches (Kapitel IV bis VI) enthält Themenvorschläge, die, anders als im ersten Teil, mehr in die Tiefe als in die Breite gehen und die beispielsweise im Rahmen einer weiterführenden Vorlesung oder eines Proseminars behandelt werden können. Das vierte Kapitel untersucht dabei das Phänomen, dass hinreichend große Objekte automatisch wohl-strukturierte Teilobjekte enthalten müssen, und führt damit in einige der Techniken der *Ramsey-Theorie* ein. Das fünfte und sechste Kapitel nehmen diese methodische Orientierung dann verstärkt auf und zeigen, wie man Probleme der Diskreten Mathematik sehr elegant mit Werkzeugen aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* bzw. aus der *Linearen Algebra* lösen kann. Die drei Kapitel der zweiten Buchhälfte sind untereinander weitgehend unabhängig und können daher nahezu beliebig kombiniert werden.

Der Schwierigkeitsgrad der beiden Buchhälften ist absichtlich relativ unterschiedlich gewählt. Der erste Teil nimmt Rücksicht auf die beim ersten Kontakt mit Diskreter Mathematik erfahrungsgemäß auftretenden Schwierigkeiten und behandelt die elementaren Grundlagen. Der zweite Teil schreckt auch vor etwas längeren Beweisen nicht zurück und möchte zeigen, dass diese anspruchsvolleren Themen bei sorgfältiger Argumentation auch für Erstsemester zu bewältigen sind und dass sich Diskrete Mathematik für Studienanfänger nicht auf Ad-hoc-Knobelaufgaben beschränken muss.

Aufgrund der Dimensionen der Lehrbuch-Serie, in der dieses Buch erscheint, kann es kaum mehr als ein diskretes Probierhäppchen darstellen. Sollte es, wie erhofft, den Appetit der Lesenden genügend geweckt haben, so bietet sich eine Reihe von weiterführenden Werken an, von denen hier nur drei exemplarisch erwähnt seien. Die gleichnamigen Bücher von Martin Aigner [2] sowie Jiří Matoušek und Jaroslav Nešetřil [41] sind wunderbar zu lesen und wesentlich umfangreicher als das vorliegende Buch. Studierenden, die ein größeres Interesse an den algorithmischen Fragestellungen der Diskreten Mathematik haben, sei die ausgezeichnete Einführung von Angelika Steger [57] nahegelegt. Weitere spezifische Literaturhinweise finden sich am Ende jedes Kapitels zusammen mit einer Sammlung an Übungsaufgaben von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad.

Die Anregung, meine Vorlesungserfahrungen an der TU München in Form dieses Buches weiterzugeben, verdanke ich meinem Kollegen Peter Gritzmann. Den Herausgebern der Buchreihe *Mathematik kompakt*, Gernot Stroth und Emo Welzl, sowie

Barbara Hellriegel vom Birkhäuser Verlag sei für die geduldige Begleitung des Buches gedankt. Bei der Themenauswahl waren Diskussionen mit Yoshiharu Kohayakawa, Oleg Pikhurko und Mathias Schacht hilfreich; hier hat sicher auch der Einfluss meines akademischen Lehrers Hans Jürgen Prömel eine dankenswerte Rolle gespielt. Großer Dank gebührt allen Mitarbeitern und Studierenden für Rückmeldungen während der Vorlesungen. Dabei danke ich besonders Julia Böttcher, Peter Heinig, Barbara Langfeld und Barbara Wilhelm, die das Manuskript gelesen und korrigiert haben, und Andreas Würfl für die Erstellung aller Abbildungen. Und schließlich möchte ich mich herzlich bei meiner Familie für die stete Aufmunterung und Abwechslung bedanken.

München, im August 2011

Anusch Taraz

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlagen	1
1	Mengen und Mengenoperationen	1
2	Vollständige Induktion	4
3	Relationen und Funktionen	7
II	Zählen	13
4	Elementares Zählen	13
5	Teilmengen	16
6	Partitionen	19
7	Erzeugende Funktionen	24
8	Asymptotisches Zählen	35
III	Graphen und Ordnungen	41
9	Wege, Kreise und Farben	41
10	Diskrete Optimierung	48
11	Euler-Touren und Hamilton-Kreise	50
12	Matchings	54
13	Planarität	60
14	Partielle Ordnungen	64
IV	Ramsey-Theorie	71
15	Der Satz von Ramsey	71
16	Konvexe Polygone	77
17	Arithmetische Progressionen	81
V	Probabilistische Methoden	89
18	Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte	89
19	Cliquen	95
20	Graphen mit hoher chromatischer Zahl	98
21	Randomisierte SAT-Algorithmen	101
VI	Algebraische Methoden	109
22	Endliche projektive Ebenen	109
23	Kombinatorik endlicher Mengen	116
24	Färbungen des $\mathbb{R}^n$ und die Borsuk-Vermutung	122
	Literaturverzeichnis	131
	Index	135