Book Review *(Communicated by Professor Zimmermann)*

Berg L: *Lineare Gleichungssysteme mit Bandstruktur*. Hanser, München 1987

Ausgangspunkt der Untersuchungen des Buches sind lineare Differenzengleichungen k-ter Ordnung. Randwertprobleme für solche führen offensichtlich auf lineare Gleichungssysteme mit Bandmatrizen der Bandbreite $k + 1$, und umgekehrt läßt sich jedes solche Gleichungssystem als Randwertproblem einer linearen Differenzengleichung deuten. Liegt insbesondere eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten vor, so erhält man eine sog. Toeplitz-Matrix, also eine Bandmatrix, bei der die Elemente auf den jeweiligen Dialogen konstant sind. Wichtige Beispiele liefert etwa die Methode der Finiten Elemente bei Anwendung auf die Poisson-Gleichung. Die Bandbreite wird dabei im wesentlichen durch den Grad der verwendeten Splineräume bestimmt. Weitere Beispiele sind Differenzenverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen. Es sind in erster Linie Anwendungen dieser Art, von denen die Untersuchungen ausgehen und die dann in den einzelnen Abschnitten jeweils gesondert behandelt werden. Im obigen Beispiel bewirkt eine regelmäßige Verfeinerung der Elemente, daß die Matrix des zu lösenden Gleichungssystems in der Dimension wächst, ansonsten aber von selber Struktur und insbesondere konstanter Bandbreite bleibt. Der Grenzübergang zu beliebig feiner Diskretisierung entspricht so dem Übergang zu unendlichen Toeplitz-Matrizen. Was dabei aysmptotisch mit den Lösungen der Systeme passiert, ist im Hinblick auf die numerische Stabilität der jeweiligen Verfahren entscheidend und ist das eigentliche Thema des Buches.

Im ersten Schritt werden zunächst Lösungen linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachtet, insbesondere bei unendlichen Systemen. In Abschnitt II folgen Aussagen über die Inversen (oder näherungsweise Inverse) von Bandmatrizen, die im Anklang an die zugrundeliegende Randwertprobleme auch als Greensche Funktionen interpretiert werden. Näherungsweise Inverse sind dabei etwa Inverse Toeplitzscher Matrizen, die die Ausgangsmatrix in einem gewissen Sinn approximieren, ein „Trick", der bei den nachfolgenden Untersuchungen ebenfalls benutzt wird. Die Untersuchungen über die inversen Matrizen bilden die Basis der asymptotischen Theorie der nächsten beiden Abschnitte, die neben klassischen Sätzen von Poincaré, Perron und Kreuzer zahlreiche neuere Resultate insbesondere auch des Verfassers enthalten. Abschnitt V beschäftigt sich mit stabilen Lösungsmethoden bei instabilen Systemen und diskutiert insbesondere die Regularisierungsmethode von Tichonov.Kapitel VI ist der Frage nach der Permutation dünn besetzter Matrizen auf Bandmatrizen möglichst kleiner Bandbreite gewidmet.

Insgesamt profitiert das Buch von der reichen Erfahrung des Autors auf diesem Gebiet. Es bietet unter anderem eine Zusammenfassung seiner zahlreichen Beiträge zu dem Themenbereich aus den letzten Jahren. Sowohl vom praktischen wie auch vom numerischen Standpunkt aus kann das Buch befriedigen. Die Darstellung ist übersichtlich insbesondere auch durch die jedem Abschnitt vorangestellte Zusammenfassung. Da es sehr stark auf Probleme im Bereich der partiellen Differentialgleichungen zugeschnitten ist und wohl auch dort seine wesentlichsten Anwendungen findet, wird es allerdings für viele Leser der ZOR weniger interessant sein.

Trier *R. Hettich*