原著論文

2本のフレキシブルリンクを有する3自由度マニピュレータのモデリングと制御

吉川恒夫* 村上弘記** 細田 耕*

Modeling and Control of a Three Degree of Freedom Manipulator with Two Flexible Links

Tsuneo YOSHIKAWA Hiroki MURAKAMI Koh HOSODA

Increasingly, light and fast robots are in demand, and the flexibility of their links are no longer negligible. For such robots, which are often called fflexible arms, it is necessary to compensate for deformations and to supress vibrations caused by the elasticity of the links. In general, some mathematical models are required for the analysis or control of flexible arms. There have been many studies about planar motions of flexible arms, but not so many about 3D motions. In this paper, a 3D spring/mass model is proposed to describe an elastic link with a heavy lumped mass and a light beam in 3D motion. A flexible arm which has three joints and two elastic links is modeled in this way. The equation of motion and then the state equation are derived to describe the dynamics of the flexible arm under certain assumptions. It is shown that we can determine the end-of-arm position and orientation from the output of accelerometers installed at the tips of the elastic links. Experimental results demonstrate that a controller designed using optimal regulator theory can suppress the vibration significantly.

Key Words : Flexible Arms, 3D motion, 3D spring/mass Model, Accelerometers, Optimal Regulator Theory

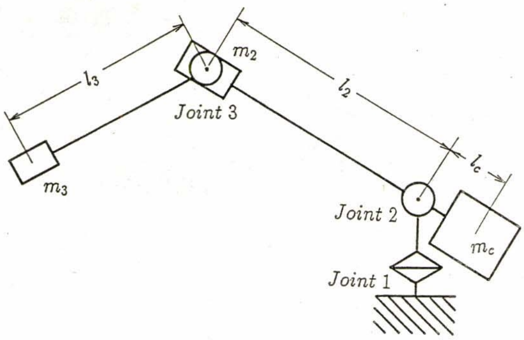
1. はじめに

近年，産業用ロボットの軽量化や，その運動の高速化が進んでおり，また宇宙用として，長尺，軽量なアームに対する要求がでている．このような，負荷に対して剛性が低下したアームを取り扱う場合には，アームの柔軟性によるたわみや振動が発生するので，これらを抑制，または補償することが重要な問題となりつつある．

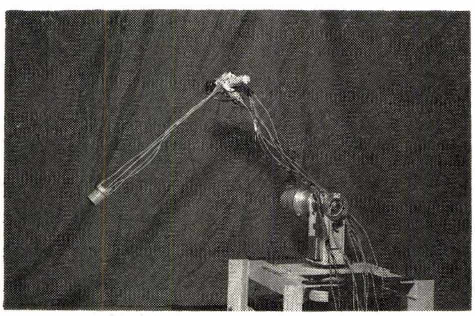
フレキシブルアームの解析や制御においては，一般にアームの柔軟性を何らかの形でモデリングする必要がある．従来行われてきた研究は，1リンクアームの運動や，2リンクのフレキシブルアームの平面運動に関するものがほとんどであった[1,2,3,4]．3次元空間内の運動については，柔軟性を手先に集中したばねとしてモデル化を行う方法[5]，静的たわみ曲線を利用する方法[6]，偏微分方程式をモードによってモデル化する方法[7]，リッツ関数によってモデルを作る方法[8]などが提案されているが，実際に3次元の実験まで行われたものは少なく，行われていても，モデルの特性上，アームの姿勢変化に対する柔軟性の変化を考慮しにくかったり[5]，ダイナミクスを考慮していない[6]というのが現状である．

一般のフレキシブルアームの場合，各リンクが非常に軽量で各リンクの先端に大きい質量がついているケースが多いと考えられる．その運動は先端の質量に支配されるので，本論文ではこのようなフレキシブルアームの3次元空間内における実時間制御を行うために，各フレキシブルリンクの柔軟性をリンク先端質量がバネによって支えられるものと近似し，アーム全体をこの結合である

原稿受付 1990年1月25日
* 京都大学工学部 ** 石川島播磨重工業(株)



(a) Structure



(b) Photo

Fig. 1 Flexible robot used for experiments

ものとしてモデル化する方法を提案する．これによってアームの姿勢変化によるアーム全体の弾性の変動や，各リンク間の振動の連成を簡単に取り扱うことができる．次に，このモデルをもとに，試作した2つのフレキシブルリンクを持つ3自由度 PUMA 形アームを対象とし，ラグランジュの方法を用いて，運動方程式を導出する．振動を検出するために，各フレキシブルリンクの先端に加速度センサを取り付け，これによって各フレキシブルリンクの弾性変位を測定できることを示す．そして，これらの制御対象に最適レギュレータの理論を適用してフィードバックゲインを求める．さらに実験を行い，提案した方法の有効性を検証する．なお，加速度センサを検出に用いることについてはいくつかの報告があり[5,9,10]，本報告もその延長上にある．

2. フレキシブルアームのモデリング

2.1 モデリングの際の仮定

Fig. 1 に示すような，3リンク3自由度のロボットアームを取り扱う．第2，第3リンクが柔軟性を持ち，その先端に集中質量 m_2, m_3 がついている．また，第2リンクの根本にはカウンタバランス m_c が付いている．ロボットの状態を検出するセンサとして，各関節にエンコーダ，第2，第3リンクの先端に加速度センサを装備している．

以上のようなアームに対して，以下のような仮定が成立するものとする．

A1.　リンク1は剛体である．

A2.　リンク2，3の先端荷重 m_2, m_3 とカウンタバランス m_c は質点とみなせる．

A3.　リンク2，3の質量は先端荷重に比べて非常に小さく，無視することができる．

A4.　リンク2，3は一様な特性を持つ丸棒を単純ばりであるとみなせる．ただし，リンク2のカウンタバランスと関節2の間の部分は剛体であるものとする．

仮定 A1～A4 に基づいて，柔軟性を持つリンクのモデルとして，その柔軟性をリンクに固定された3本の並

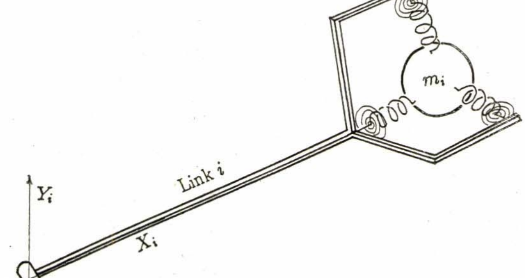


Fig. 2 3D spring/mass model

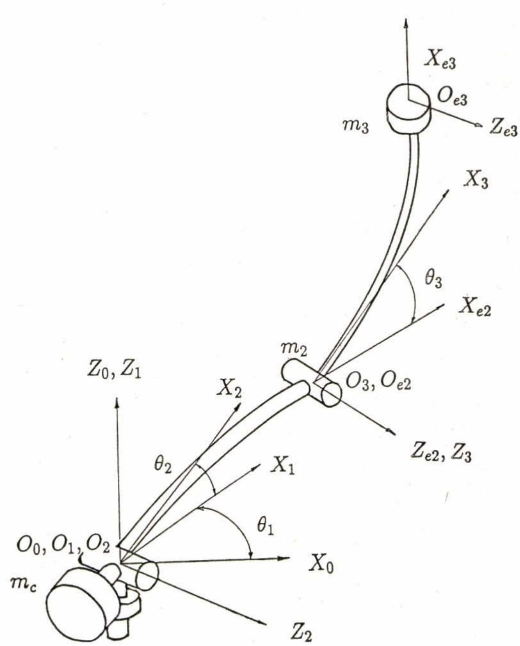


Fig. 3 Coordinate frames of the flexible robot

進ばね，回転ばねによって記述し，これらに先端質点が支えられているような，３次元ばね―質量モデルを考える（**Fig. 2**）.

2.2　座標系の設定

以上のようなフレキシブルアームに対して座標系を設定する（**Fig. 3**）．基準座標系 Σ_0 の原点 O_0 を関節軸１，２の交点に，Z_0 軸を関節１に沿って鉛直上方に，そして X_0, Y_0 軸を右手系をなすようにとる．この基準座標系は慣性座標系になっているとする．第１リンク座標系 Σ_1 は関節１の変位が０のとき Σ_0 と一致するようにリンク１に固定する．第２リンク座標系 Σ_2 は原点は Σ_0, Σ_1 と同じで，X_2 軸はリンク２の接線を，Z_2 軸は関節軸２をとり，Y_2 軸をこれらと右手系をなすようにとる．第３リンク座標系は，原点 O_3 を，弾性変形していないときの第２リンクと，関節軸３との交点とし，第２リンク座標系と同様に第３リンクに固定してとる．

リンク２，３は柔軟性を持つので，その弾性変位を記述するためにリンク先端座標系 Σ_{ei} $(i=2,3)$ を設定する．これらはリンク i の先端に固定され，弾性変位がないときにリンク i 座標系と方向が一致するようにとる．

2.3　弾性力と変位の関係

リンク i 先端座標系 Σ_{ei} のリンク i 座標系 Σ_i に関する変位，変位角を，ベクトル d_i, ϕ_i で表す．

$$d_i=[l_i+\delta_{ix}\delta_{iy}\delta_{iz}]^T \quad (i=2,3) \qquad (1)$$

$$\phi_i=[\phi_{ix}\phi_{iy}\phi_{iz}]^T \quad (i=2,3) \qquad (2)$$

ここで l_i はリンク i の長さ，δ_i, ϕ_i はリンク i の弾性によって生じる Σ_{ei} の Σ_i に関する微小変位，微小変位角である．また添字 T は，行列またはベクトルの転置を表す．

仮定 A3，A4 より，リンク i 座標系 Σ_i からみたリンク i 先端にかかる力，モーメント f_i, n_i は弾性変位 δ_i, ϕ_i を使って，

$$\begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i3} \\ K_{i3}^T & K_{i2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \qquad (3)$$

で与えられる．ここで，K_{ij} は以下のようになる．

$$K_{i1}=diag[A_iE_i/l_i \;\; 12\,E_iI_i/l_i^3 \;\; 12\,E_iI_i/l_i^3]$$
$$\triangleq diag[K_{ia} \;\; K_{ib} \;\; K_{ib}]$$
$$K_{i2}=diag[G_i\hat{I}_i/l_i \;\; 4\,E_iI_i/l_i \;\; 4\,E_iI_i/l_i]$$
$$\triangleq diag[K_{ic} \;\; K_{id} \;\; K_{id}]$$
$$K_{i3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\,E_iI_i/l_i^2 \\ 0 & 6\,E_iI_i/l_i^2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\triangleq\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ie} \\ 0 & -K_{ie} & 0 \end{bmatrix}$$

ただし，

E_i：リンク i の縦弾性係数
G_i：リンク i の横弾性係数
A_i：リンク i の断面積
l_i：リンク i の長さ
I_i：リンク i の断面２次モーメント
$\hat{I}_i$：リンク i の断面２次極モーメント

である．

3.　３自由度フレキシブルアームの運動学

3.1　座標変換

第 i 関節角を θ_i とし，リンク i 座標系 Σ_i からリンク j 座標系 Σ_j への姿勢変換行列を ${}^jR_i$ とするとき，

$$ {}^0R_1=\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$ {}^1R_2=\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$ {}^{e2}R_3=\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

となる．また，Σ_{e2} から Σ_2 への変換行列 ${}^2R_{e2}$ は，２次以上の微小項を無視すると

$$ {}^2R_{e2}=\begin{bmatrix} 1 & -\phi_{2z} & \phi_{2y} \\ \phi_{2z} & 1 & -\phi_{2x} \\ -\phi_{2y} & \phi_{2x} & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

となる．

Σ_i から基準座標系 Σ_0 への変換行列 ${}^0T_i$ も，以下のように定義しておく．

$$ {}^0T_1={}^0R_1 \qquad (6)$$
$$ {}^0T_2={}^0R_1{}^1R_2 \qquad (7)$$
$$ {}^0T_3={}^0R_1{}^1R_2{}^2R_{e2}{}^{e2}R_3 \qquad (8)$$

3.2　リンク先端質点の運動

基準座標系から見た，第２リンク，第３リンクの先端質点の位置ベクトルを r_i $(i=2,3)$．とすると，

$$r_i=\sum_{j=2}^{i}{}^0T_jd_j \qquad (9)$$

となる．また，リンク２についているカウンタバランスの重心ベクトル r_c は以下のようになる．

$$r_c={}^0T_2d_c \qquad (10)$$

ただし，d_c は第２リンク座標系から見たカウンタバランスの位置ベクトルで，$d_c=[-l_c \;\; 0 \;\; 0]^T$ で表される．

先端質点の速度，加速度は（９）式を微分することによって次のように得られる．

$$\dot{r}_i=\sum_{j=2}^{i}\left\{\left(\sum_{k=1}^{3}U_{jk}\dot{\theta}_k+U_j{}^*\right)d_j+{}^0T_j\dot{d}_j\right\} \qquad (11)$$

$$\ddot{r}_i=\sum_{j=2}^{i}\left[\left\{\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=j}^{3}U_{jkl}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_l+2\,U_{jk}{}^*\dot{\theta}_k+U_{jk}\ddot{\theta}_k\right)\right.\right.$$

$$+U_j^{**}\Big\}d_j+2\left(\sum_{k=j}^{3}U_{jk}\dot{\theta}_k+U_j^*\right)\dot{d}_j+{}^0T_j\ddot{d}_j\Big] \tag{12}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}
&U_{jk}=\frac{\partial}{\partial\theta_k}{}^0T_j\\
&U_{jkl}=\frac{\partial}{\partial\theta_l}U_{jk}\\
&U_j^*=0 && (j=2)\\
&U_j^*={}^0R_1{}^1R_2\left(\frac{d}{dt}{}^2R_{e2}\right){}^{e2}R_3 && (j=3)\\
&U_j^{**}=0 && (j=2)\\
&U_j^{**}={}^0R_1{}^1R_2\left(\frac{d^2}{dt^2}{}^2R_{e2}\right){}^{e2}R_3 && (j=3)\\
&U_{jk}^*=0 && (j=2)\\
&U_{jk}^*=\frac{\partial}{\partial\theta_k}U_j^* && (j=3)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

である．Uの最初の添字jは微分される姿勢変換行列が${}^0T_j$であることを表し，それ以後の添字k, lはθ_k, θ_lについての偏微分を，$*$はϕのみについての時間微分をそれぞれ表している．また，カウンタバランスの重心ベクトルr_cの速度，加速度は次のようになる．

$$\dot{r}_c=\sum_{j=1}^{2}(U_{2j}\dot{\theta}_j)d_c \tag{14}$$

$$\ddot{r}_c=\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2}U_{2jk}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k+U_{2j}\ddot{\theta}_j\right)d_c \tag{15}$$

4. 3自由度フレキシブルアームの動力学

4.1 運動エネルギ

2.1 節でおいた仮定 A2, A3より，このロボットの運動エネルギは，リンク2，3の先端質量とカウンタバランスの運動エネルギ，および各軸のモータの回転運動エネルギの和となる．リンクiの運動エネルギE_{ki}は，

$$E_{k1}=\frac{1}{2}I_{m1}\dot{\theta}^2{}_1 \tag{16}$$

$$E_{k2}=\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2{}^T\dot{r}_2+\frac{1}{2}m_c\dot{r}_c{}^T\dot{r}_c+\frac{1}{2}I_{m2}\dot{\theta}_2{}^2 \tag{17}$$

$$E_{k3}=\frac{1}{2}m_3\dot{r}_3{}^T\dot{r}_3+\frac{1}{2}I_{m3}\dot{\theta}_3{}^2 \tag{18}$$

と表される．ただし，I_{mi}はi軸モータの関節軸回りの慣性モーメントで，I_{m1}はリンク1のZ_1軸回りの慣性モーメントも含むものとする．したがって，ロボット全体の運動エネルギE_kは，

$$E_k=\sum_{i=1}^{3}E_{ki} \tag{19}$$

で与えられる．

4.2 ポテンシャルエネルギ

（3）式より，第iリンクの弾性によるポテンシャルエネルギE_{pi} $(i=2,3)$は，

$$E_{pi}=\frac{1}{2}[\delta_j{}^T\ \phi_j{}^T]\begin{bmatrix}K_{i1} & K_{i3}\\ K_{i3}{}^T & K_{i2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_i\\ \phi_i\end{bmatrix} \tag{20}$$

となる．また重力によるポテンシャルエネルギE_{pg}は，次のようになる．

$$E_{pg}=m_2g^Tr_2+m_3g^Tr_3+m_cg^Tr_c \tag{21}$$

ここで，

$$g=[0\ \ 0\ \ g_0]^T \qquad g_0：\text{重力加速度}$$

である．以上より，ロボット全体のポテンシャルエネルギE_pは，

$$E_p=\sum_{i=2}^{3}E_{pi}+E_{pg} \tag{22}$$

と表される．

4.3 ロボットの運動方程式

ラグランジュ法を用いてロボットの運動方程式を導出する．ラグランジュ関数Lは，

$$L=E_k-E_p \tag{23}$$

で与えられる．

まず，関節変数θ_i $(i=1,2,3)$についての運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=\tau_i, \qquad (i=1,2,3) \tag{24}$$

となる．ただしτ_iは，i関節における駆動トルクである．（24）式を計算し（12），（15）式を用いると，

$$\tau_i=\sum_{j=i}^{3}\left\{m_j(\ddot{r}_j+g)^T\left(\sum_{k=1}^{j}U_{ki}d_k\right)\right\}+m_c(\ddot{r}_c+g)^T(U_{2i}d_c)+I_{mi}\ddot{\theta}_i \tag{25}$$

を得る．ロボットの構造上$m_1=0$となるのだが，ここではm_1のまま残して計算の見通しを良くした．

弾性変位，変位角δ_i, ϕ_i $(i=2,3)$に関する運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\delta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\delta_i}=0 \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi_i}=0 \tag{27}$$

となる．これらを計算すると，まずδ_iに関して，

$$m_3{}^0T_2{}^T(\ddot{r}_3+g)+m_2{}^0T_2{}^T(\ddot{r}_2+g)+K_{21}\delta_2+K_{23}\phi_2=0 \tag{28}$$

$$m_3{}^0T_3{}^T(\ddot{r}_3+g)+K_{31}\delta_3+K_{33}\phi_3=0 \tag{29}$$

またϕ_iに関して，

$$m_3V_3{}^T(\ddot{r}_3+g)+K_{23}{}^T\delta_2+K_{22}{}^T\phi_2=0 \tag{30}$$

$$K_{33}{}^T\delta_3+K_{32}\phi_3=0 \tag{31}$$

を得る．ただし，V_3は，

$$V_3=\frac{\partial}{\partial\phi_2{}^T}(U_3{}^*d_3) \tag{32}$$

で与えられ行列である．

4.4 回転変位の消去

2.1 節の仮定 A2で，リンク先端の集中質量を質点と

仮定したことから，(25)，(28)～(31) 式で表された運動方程式においてϕは θ, δ に従属な変数となる．

(31) 式より，ϕ_3 は次のように表される．

$$\phi_3 = -K_{32}^{-1}K_{33}^T\delta_3 \tag{33}$$

この式と (29) 式，(30) 式より ϕ_2 は，

$$\phi_2 = K_{22}^{-1}V_3^{T\,0}T_3(K_{31} - K_{33}K_{32}^{-1}K_{33}^T)\delta_3 - K_{22}^{-1}K_{23}^T\delta_2 \tag{34}$$

のように表される．(33)，(34) 式を時間微分して ${}_i\dot{\phi}$，$\ddot{\phi}_i$ を求め，(25)，(28)，(29) 式に代入することにより，θ, δ を独立変数とする運動方程式を得ることができる．この計算手順は簡単であるが，得られる運動方程式はかなり複雑な形になるのでここには示さない．

5. 制御系の構成

5.1 状態方程式の導出

制御系の構成のための状態方程式を導出するにあたり，上述のように運動方程式が少し複雑すぎるので，次のような仮定を設けて，近似的な運動方程式を求める．

B1. 目標軌道の終点のまわりの振動制御を取り扱うものとし，コリオリ力，遠心力は無視する．

B2. 振動により発生する変位は微小とする．したがって，弾性力の項以外に δ, ϕ を含む項は無視する．

B3. X 軸方向には，変形しないものとする．($\delta_x \equiv 0$)

仮定 B1，B2 より (12)，(15) 式は，

$$\ddot{r}_2 = U_{21}\bar{d}_2\ddot{\theta}_1 + U_{22}\bar{d}_2\ddot{\theta}_2 + {}^0T_2\ddot{\delta} \tag{35}$$

$$\ddot{r}_3 = (U_{21}\bar{d}_2 + \bar{U}_{31}\bar{d}_3)\ddot{\theta}_1 + (U_{22}\bar{d}_2 + \bar{U}_{32}\bar{d}_3)\ddot{\theta}_2 + \bar{U}_{33}\bar{d}_3\ddot{\theta}_3 + V_3\ddot{\phi}_3 + {}^0\bar{T}_2\ddot{\delta}_2 + {}^0T_3\ddot{\delta}_3 \tag{36}$$

$$\ddot{r}_c = U_{21}d_c\ddot{\theta}_1 + U_{22}d_c\ddot{\theta}_2 \tag{37}$$

となる．ただし，

$$\bar{d}_2 = [l_2\ 0\ 0]^T,\quad \bar{d}_3 = [l_3\ 0\ 0]^T$$

$${}^0\bar{T}_3 = {}^0R_1{}^1R_2{}^{e2}R_3,\quad \bar{U}_{3i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}{}^0\bar{T}_3$$

である．(33)～(37) 式を，(25)，(28)，(29) 式に代入，仮定 B1～B3 を使い，さらに，

$$\xi = [\theta_1\ \delta_{2z}\ \delta_{3z}\ \theta_2\ \theta_3\ \delta_{2y}\ \delta_{3y}]^T$$

$$u = [\tau_1\ \tau_2\ \tau_3]^T$$

とおいて整理すると，最終的に以下のような運動方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} M_h & 0 \\ 0 & M_v \end{bmatrix}\ddot{\xi} + \begin{bmatrix} F_h & 0 \\ 0 & F_v \end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix} 0 \\ G_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_h & 0 \\ 0 & D_v \end{bmatrix}u \tag{38}$$

$$M_h = \begin{bmatrix} (m_2l_2^2 + m_cl_c^2)\cos^2\theta_2 + m_3L_c^2 + I_{m1} & -m_2l_2\cos\theta_2 - m_3L_c(1 - K_{h1}l_3) & -m_3L_c(1 + K_{h2}l_3^2) \\ -m_2l_2\cos\theta_2 - m_3L_c & m_2 + m_3 - m_3l_3K_{h1} & m_3(1 + K_{h2}l_3^2) \\ -m_3L_c & m_3 - m_3l_3K_{h1} & m_3(1 + K_{h2}l_3^2) \end{bmatrix}$$

$$M_v = \begin{bmatrix} m_2l_2^2 + m_cl_c^2 + m_3(L_s^2 + L_c^2) + I_{m2} & m_3l_3(l_3 + l_2\cos\theta_3) & m_2l_2 + m_3l_2 + m_3l_3\{\cos\theta_3 - K_{v1}(l_3 + l_2\cos\theta_3)\} & m_3(l_3 + l_2\cos\theta_3)(1 + K_{v2}l_3^2) \\ m_3l_3(l_3 + l_2\cos\theta_3) & m_3l_3^2 + I_{m3} & m_3l_3(\cos\theta_3 - K_{v1}l_3) & m_3l_3(1 + K_{v2}l_3^2) \\ m_2l_2 + m_3(l_2 + l_3\cos\theta_3) & m_3l_3\cos\theta_3 & m_2 + m_3 - m_3l_3K_{v1}\cos\theta_3 & m_3\cos\theta_3(1 + K_{v2}l_3^2) \\ m_3(l_3 + l_2\cos\theta_3) & m_3l_3 & m_3(\cos\theta_3 - l_3K_{v1}) & m_3(1 + K_{v2}l_3^2) \end{bmatrix}$$

$$F_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{2b} - \dfrac{K_{2e}^2}{K_{2d}} & \dfrac{K_{2e}}{K_{2d}}\left(K_{3b} - \dfrac{K_{3e}^2}{K_{3d}}\right)l_3\cos\theta_3 \\ 0 & 0 & K_{3b} - \dfrac{K_{3e}^2}{K_{3d}} \end{bmatrix}$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{2b} - \dfrac{K_{2e}^2}{K_{2d}} & \dfrac{K_{2e}}{K_{2d}}\left(K_{3b} - \dfrac{K_{3e}^2}{K_{3d}}\right)l_3 \\ 0 & 0 & 0 & K_{3b} - \dfrac{K_{3e}^2}{K_{3d}} \end{bmatrix}$$

$$D_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\qquad D_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_v = \begin{bmatrix} (m_2l_2 + m_cl_c)\cos\theta_2 + m_3L_c \\ m_3l_3\cos(\theta_2 + \theta_3) \\ (m_2 + m_3)\cos\theta_2 \\ m_3\cos(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}g_0$$

ただし，

$$L_c = l_2\cos\theta_2 + l_3\cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$L_s = l_2\sin\theta_2 + l_3\sin(\theta_2 + \theta_3)$$

$$K_{h1} = \frac{K_{2e}}{K_{2d}}\cos\theta_3$$

$$K_{h2} = \left(K_{3b} - \frac{K_{3e}^2}{K_{3d}}\right)\left(\frac{\sin^2\theta_3}{K_{2c}} + \frac{\cos^2\theta_3}{K_{2d}}\right)$$

$$K_{v1}=\frac{K_{2e}}{K_{2d}}$$

$$K_{v2}=\left(K_{3b}-\frac{K_{3e}{}^2}{K_{3d}}\right)\Big/K_{2d}$$

である．(38) 式より，運動方程式が水平方向，垂直方向の成分に分離されていることに注意しよう．今，状態変数を，

$$x_h=[\theta_1\ \delta_{2z}\ \delta_{3z}\ \dot{\theta}_1\ \dot{\delta}_{2z}\ \dot{\delta}_{3z}]^T$$

$$x_v=[\theta_2\ \theta_3\ \delta_{2y}\ \delta_{3y}\ \dot{\theta}_2\ \dot{\theta}_3\ \dot{\delta}_{2y}\ \dot{\delta}_{3y}]^T$$

とし，入力を，

$$n_h=[\tau_1]$$

$$u_v=[\tau_2\ \tau_3]^T$$

とすると，水平方向，垂直方向それぞれの状態方程式表現は，

$$\ddot{x}_h=A_hx_h+B_hu_h \tag{39}$$

$$\dot{x}_v=A_vx_v+B_vu_v-\begin{bmatrix}0\\ M_v{}^{-1}G_v\end{bmatrix} \tag{40}$$

となる．ただし，

$$A_h=\begin{bmatrix}0 & \bar{E}_3\\ -M_h{}^{-1}F_h & 0\end{bmatrix}$$

$$A_v=\begin{bmatrix}0 & \bar{E}_4\\ -M_v{}^{-1}F_v & 0\end{bmatrix}$$

$$B_h=\begin{bmatrix}0\\ M_h{}^{-1}D_h\end{bmatrix}$$

$$B_v=\begin{bmatrix}0\\ M_v{}^{-1}D_v\end{bmatrix}$$

$\bar{E}_i : i\times i$　単位行列

である．(40) 式の右辺の第3項は以下に示す補償によって0とみなすことができる．G_v の第1，第2成分は，

$$u_v{}'=u_v+\begin{bmatrix}(m_2l_2+m_cl_c)\cos\theta_2+m_3L_c\\ m_3l_3\cos(\theta_2+\theta_3)\end{bmatrix}g_0 \tag{41}$$

を新しい入力とする事で補償できる．また δ_{2y},δ_{3y} の目標値 $\delta_{2yd},\delta_{3yd}$ を重力による静的なたわみ量とし，δ_{2y}, δ_{3y} と δ_{2yd}, δ_{3yd} の偏差を改めて δ_{2y}, δ_{3y} とおくことにより G_v の第3，第4成分を補償する．ここで目標値 δ_{2yd}, δ_{3yd} は運動方程式 (38) の動的な項をすべて0とおくことによって次のように求まる．

$$\delta_{2yd}=-\frac{m_3\cos(\theta_2+\theta_3)l_2{}^2l_3g_0}{2E_2l_2}-\frac{(m_2+m_3)\cos\theta_2l_2{}^3g_0}{3E_2l_2} \tag{42}$$

$$\delta_{3yd}=-\frac{m_3\cos(\theta_2+\theta_3)l_3{}^3g_0}{3E_3I_3} \tag{43}$$

5.2　観測方程式の導出

各関節のエンコーダによって，状態量のうち，関節の角度を測定することができる．また，各弾性リンクの先端に取り付けた加速度センサによって，弾性変形の成分である δ を観測することができる．以下にそれを示す．なお，加速度センサは $\sum_{ei}$ 座標系の XYZ 各軸に沿って取り付けるものとする．

第 i リンク先端に取り付けた加速度センサの出力を a_i とすると，次ように表される．

$$a_i={}^0T_i{}^T(\ddot{r}_i+g) \tag{44}$$

(28)～(31) 式を使い，仮定 B1 により遠心力，コリオリ力の項を無視すると，センサ出力 a_i と，先端変位 δ_i の間には，以下のような関係式が成り立つ．

$$\begin{bmatrix}\delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}m_2N_1{}^{-1} & m_3N_1{}^{-1e2}R_3-m_3N_1{}^{-1}N_2N_3{}^{-1}\\ 0 & m_3N_3{}^{-1}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_2\\ a_3\end{bmatrix} \tag{45}$$

ただし，

$$N_1=K_{21}-K_{23}K_{22}{}^{-1}K_{23}{}^T$$

$$N_2=K_{23}K_{22}{}^{-1}\bar{V}_3{}^0\bar{T}_3(K_{31}-K_{33}K_{32}{}^{-1}K_{33}{}^T)$$

$$N_3=K_{31}-K_{33}K_{32}{}^{-1}K_{33}{}^T$$

である．(45) 式を書き下し，仮定 B3 より δ_x を無視，各エンコーダ信号を加えることによって，次のような観測方程式を得る．

$$\begin{aligned}\xi&=[\theta_1\ \delta_{2x}\ \delta_{3z}\ \theta_2\ \theta_3\ \delta_{2y}\ \delta_{3y}]^T\\ &=H[\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\ a_{2y}\ a_{2z}\ a_{3x}\ a_{3y}\ a_{3z}]^T\end{aligned} \tag{46}$$

ただし，

$$H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_2l_2{}^3}{3E_2I_2} & 0 & 0 & -\frac{m_3l_2{}^2}{6E_2I_2}(2l_2+3l_3\cos\theta_3)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_3l_3{}^3}{3E_3I_3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{m_2l_2{}^3}{3E_2I_2} & 0 & -\frac{m_3l_2{}^3}{3E_2I_2}\sin\theta_3 & -\frac{m_3l_2{}^2}{6E_2I_2}(2l_2\cos\theta_3+3l_3) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_3l_3{}^3}{3E_3I_3} & 0\end{bmatrix}$$

である．Hは行フルランクになっており，可観測であることがわかる．なお，(46) 式はセンサ入力が8つで，状態変数は7つしかない冗長な表現になっており，例えば a_{3x} のセンサがなくても測定可能であるが，本論文

では，8つのセンサを取り付け，観測値をより正確なものとすることにする．

5.3 振動制御のアルゴリズム

前節までの考察によって重力項を除くと線形な状態方程式 (39)，(40) が得られ，また，システムが可観測であることがわかったので，これに最適レギュレータの理論を用い状態フィードバックゲインを求めることを考える．

最適レギュレータを構成する際の水平方向，垂直方向の評価関数 J_h, J_v として，以下のようなものを考える．

$$\left.\begin{aligned} J_h &= \int \{(x_h - x_{hd})^T Q_h (x_h - x_{hd}) + u_h^T R_h u_h\} dt \\ J_v &= \int \{(x_v - x_{vd})^T Q_v (x_v - x_{vd}) + u_v^T R_v u_v\} dt \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

ただし，Q, R は，適当な重み行列である．また，x_{hd}, x_{vd} はそれぞれ x_h, x_v の目標値であり，

$$x_{hd} = [\theta_{1d} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$
$$x_{vd} = [\theta_{2d} \quad \theta_{3d} \quad \delta_{2yd} \quad \delta_{3yd} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

とする．J_h, J_v を最小化する状態フィードバック制御則は，システムが可制御可観測である場合，次のリカッチ方程式の解 P を用いることにより一意に求めることができる．

$$\left.\begin{aligned} P_h A_h + A_h^T P_h - P_h B_h R_h^{-1} B_h^T P_h + Q_h &= 0 \\ P_v A_v + A_v^T P_v - P_v B_v R_v^{-1} B_v^T P_v + Q_v &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

このとき，最適入力 u_h^*, u_v^* は，

$$\left.\begin{aligned} u_h^* &= -R_h^{-2} B_h P_h (x_h - x_{hd}) \\ u_v^* &= -R_v^{-1} B_v P_v (x_v - x_{vd}) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

となる．なお，(49) 式の状態フィードバックゲインは，関節変数 $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ の関数であることに注意されたい．したがって，各種の終点における制御を行いたい場合には，各終点に対応するについてリカッチ方程式

Table 1 Parameters of links

	link 2	link 3
Length(m)	0.6	0.6
Diameter(m)	0.010	0.006
Bending rigidity($N \cdot m^2$)	101.0	13.09
Torsional rigidity($N \cdot m^2$)	77.71	10.07

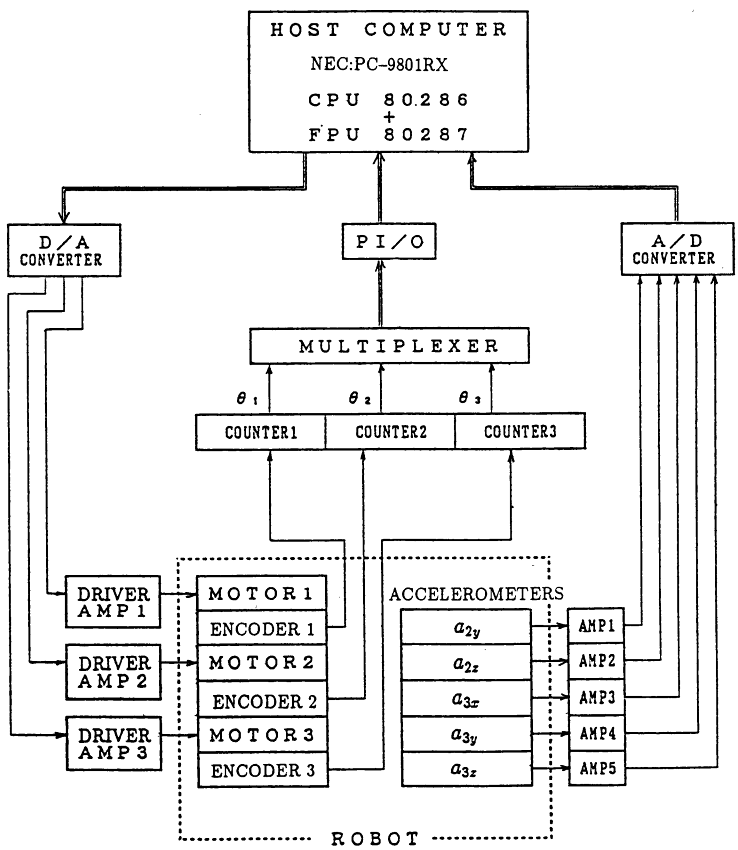


Fig. 4 Block diagram of robot control system

(48) の解が必要である．このため，各 θ の値に対する最適フィードバックゲインのテーブルをあらかじめオフラインで作成しておくなどの工夫が必要であろう．

6. 試作したロボットによる実験

6.1 実験装置

本方法の有効性を検証するために，各軸 PD 制御との結果の比較を行う．ここで目標値は，仮定 B1 にも示したように PTP で与えるものとする．

今回実験に使用したロボットの諸元を **Table 1** に示す．リンク 2，3 が柔軟性を持つアームである．リンク 2，リンク 3 の先端質量はそれぞれ，2.1 kg，0.25 kg で，リンク 2 には，関節 2 から −13 cm の位置にカウンタバランス 4.2 kg が取り付けられている．各関節は，DC モータによってハーモニックドライブを通じて駆動され，$I_{m1}=2.52$，$I_{m2}=0.46$，$I_{m3}=0.11(\mathrm{kg \cdot m^2})$ である．

コントローラの構成図を **Fig. 4** に示す．各関節角はオプティカルエンコーダによって検出され，その信号は PI/O を通してホストコンピュータに取り込まれる．第 2，第 3 リンクの先端の加速度センサによって $a_{2y}, a_{2z}, a_{3x}, a_{3y}, a_{3z}$ が検出され，A/D コンバータを通じてホ

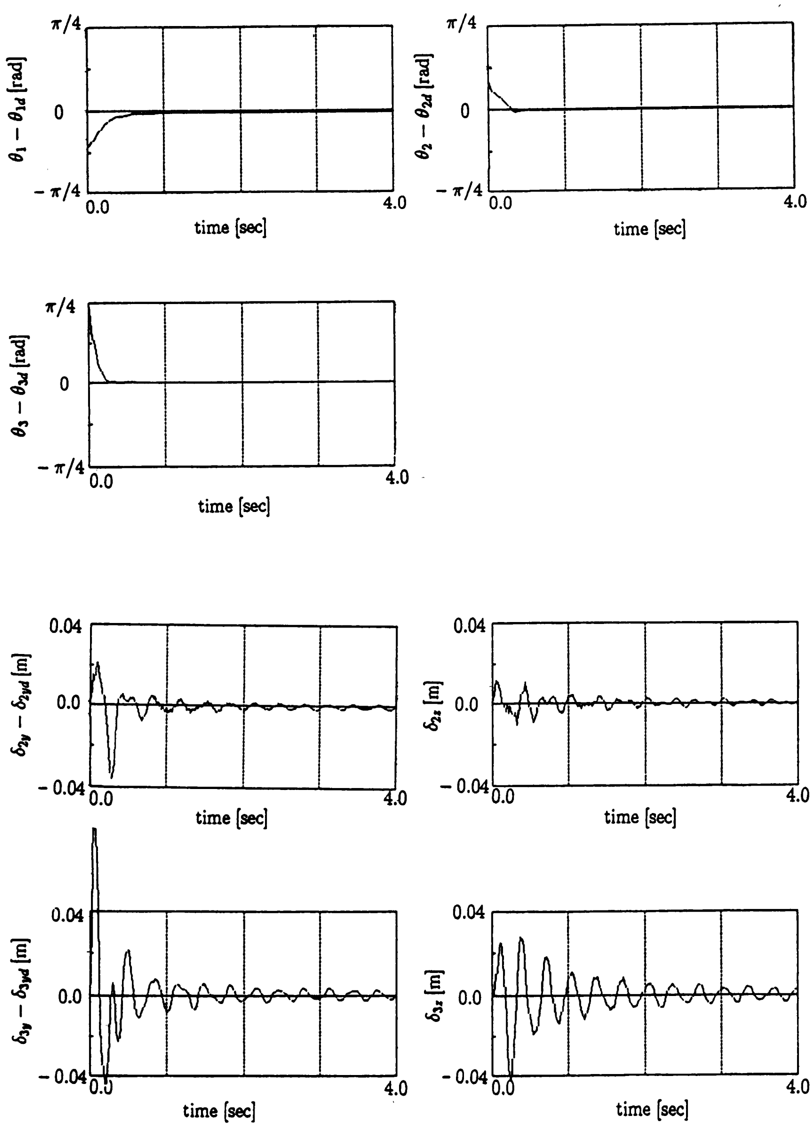


Fig. 5 Experimental results
(using PD control, [0° 60° −45°]→[20° 45° −90°])

ストコンピュータに送られる．これらの測定値から(46)式よりξが得られ，$\dot{\xi}$はこれを数値微分して求められる．ホストコンピュータにより算出された駆動入力信号は，D/Aコンバータよりドライバアンプへと供給される．

実際の実験では，NEC製マイクロコンピュータPC-9801 RX（数値演算プロセッサ80287搭載）をホストコンピュータとし，アセンブラ言語とC言語でプログラムを記述したところ，各軸PD制御，提案した方法ともに制御器のサンプリングタイムは4.0 msとなった．

6.2 実験結果

実験は$[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$について，以下のような値を始点，目標値とするPTP制御について，各軸PD制御と本方式との比較を行った．

$$[0°, 60°, -45°] \rightarrow [20°, 45°, -90°]$$

まず各軸PD制御のゲインを実験的に調整し，次のようにとった．

$$\tau_1 = -300.0(\theta_1 - \theta_{1d}) - 59.3\,\dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = -297.3(\theta_2 - \theta_{2d}) - 34.6\,\dot{\theta}_2$$

$$\tau_3 = -192.9(\theta_3 - \theta_{3d}) - 14.1\,\dot{\theta}_3$$

状態フィードバックの最適ゲインを決定するには，重み行列を決めなければならない．ここでは，制振制御の各関節角θ_iについてのフィードバックゲインを算出した

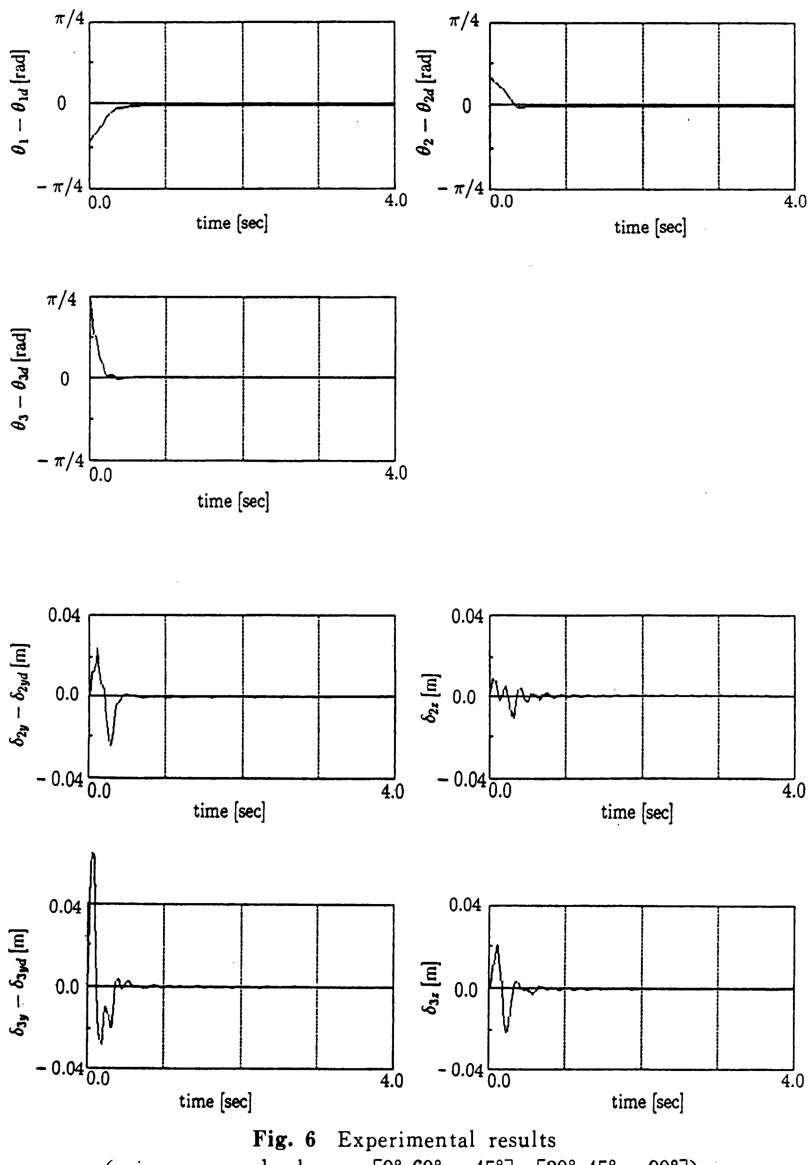


Fig. 6 Experimental results
(using proposed scheme, [0° 60° −45°]→[20° 45° −90°])

結果，実験的に調整した各軸PD制御のゲインに近くなるようにとった．使用した重み行列を以下に示す．

$$Q_h = diag[9\times10^4 \quad 1\times10^6 \quad 5\times10^6 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$R_h = [1]$$

$$Q_v = diag[9.5\times10^4 \quad 8\times10^4 \quad 8\times10^5 \quad 8\times10^5 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10]$$

$$R_v = diag[1 \quad 2]$$

この重みを使って求まった制御則は次のようになる．

$$\tau_1 = -300.0(\theta_1-\theta_{1d}) - 2941.7\,\delta_{2z} - 365.1\,\delta_{3z} - 59.3\,\dot{\theta}_1 - 28.2\,\dot{\delta}_{2z} - 73.1\,\dot{\theta}_{3z}$$

$$\tau_2 = -297.3(\theta_2-\theta_{2d}) + 74.5(\theta_3-\theta_{3d}) + 555.0(\delta_{2y}-\delta_{2yd}) - 55.7(\delta_{3y}-\delta_{3yd}) - 34.6\,\dot{\theta}_2 + 3.8\,\dot{\theta}_3 + 11.7\,\dot{\delta}_{2y} + 5.1\,\dot{\delta}_{3y}$$

$$\tau_3 = -57.4(\theta_2-\theta_{2d}) - 192.9(\theta_3-\theta_{3d}) - 76.1(\delta_{2y}-\delta_{2yd}) + 444.5(\delta_{3y}-\delta_{3yd}) - 7.9\,\dot{\theta}_2 - 14.1\,\dot{\theta}_3 - 21.2\,\dot{\delta}_{2y} + 7.8\,\dot{\delta}_{3y}$$

実験の結果を **Fig. 5～6** に示す．グラフはそれぞれ関節角偏差 $\theta_1-\theta_{1d}$, $\theta_2-\theta_{2d}$, $\theta_3-\theta_{3d}$ と，先端弾性変位 $\delta_{2y}-\delta_{2yd}$, δ_{2z}, $\delta_{3y}-\delta_{3yd}$, δ_{3z} を表している．なお，この軌道周辺に関しては可制御であることを数値的に確認した．

Fig. 5，6 より各軸 PD 制御で存在した大きな残留振動が，提案した制御方式によって顕著に抑えられていることがわかる．なお，関節角偏差 $\theta_1-\theta_{1d}, \theta_2-\theta_{2d}$ のグラフにおいて，定常偏差が生じているのは各関節における摩擦によるものであると思われる．

7. おわりに

本論文では，3自由度2フレキシブルリンクを持つアームの制振制御について考察を行った．まず，各リンクを簡単なバネ，質量系で近似し，ロボット全体をその結合として表すようなモデルを提案した．そして，そのモデルの運動方程式を導き，ある仮定のもとで近似を行い，線形な状態方程式を求めた．また，リンク先端の加速度センサにより，モデルの柔軟性の状態が観測できることを示し，これに対し，最適レギュレータ理論を用いて制御系を構成した．さらに実験を行い，各関節についての PD 制御との比較をして本方式の有効性を検証した．

今後の研究課題としては，このモデルを用いた軌道制御の問題がある．

なお，本研究に用いたフレキシブルアーム実験装置の作成については，(株)豊田自動織機のご援助を得た．また，本研究にご協力いただいた吉田篤氏（現在(株)リクルート）に感謝の意を表す．

参考文献

1) W. J. Book, O. Maizza-Neto, and D. E. Whitney. Feedback control of two beam, two joint systems with distributed flexibility. *Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, pp. 424-431, 1975
2) R. H. Cannon and E. Schmitsz. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. *Int J. of Robotics Reserch*, 3(3)：pp. 62-75, 1984
3) 内山　勝，他．フレキシブルロボットアームの補償制御．日本ロボット学会誌，7(4)：pp. 20-30, 1989
4) 下山　勲，三浦宏文．静たわみ曲線を利用したフレキシブルアームの動力学モデル．日本ロボット学会誌，6(5)：pp. 72-78, 1988
5) 坂和愛幸，松野文俊，他．3自由度フレキシブル・マニピュレータのモデリングと加速度センサを用いた振動制御．日本ロボット学会誌，6(1)：pp. 42-51, 1988
6) 内山　勝，清水博文．3次元フレキシブルロボットアームの振動制御，日本機械学会ロボティクスメカトロニクス講演会 '89, pp. 70-71, 1989
7) T. Fukuda et al. Decoupled vibration control of 3d robotic arm with flexible links. In *Proc. of the U. S. A.-Japan Symp. on Flexible Automation*, pp. 415-421, 1988
8) F. Pfeiffer. A feedforward decoupling concept for the control of elastic robots. *J. of Robotic Systems*, 6(4)：pp. 407-416, 1889
9) S. Futami, M. Kyura, and S. Hara. Vibration absorption control of industrial robots by acceleration feedback. In *Proc. of IEEE Int. Conf. on Industrial Electronics*, pp. 299-305, 1983
10) 丸山，内山，秋田．加速度フィードバックを用いたロボットアームの振動抑制法，計測自動制御学会論文集，22(5)：pp. 92-94, 1986