HEINRICH BEHMANN'S 1921 LECTURE ON THE DECISION PROBLEM AND THE ALGEBRA OF LOGIC

PAOLO MANCOSU AND RICHARD ZACH

Abstract. Heinrich Behmann (1891–1970) obtained his *Habilitation* under David Hilbert in Göttingen in 1921 with a thesis on the decision problem. In his thesis, he solved—independently of Löwenheim and Skolem's earlier work—the decision problem for monadic second-order logic in a framework that combined elements of the algebra of logic and the newer axiomatic approach to logic then being developed in Göttingen. In a talk given in 1921, he outlined this solution, but also presented important programmatic remarks on the significance of the decision problem and of decision procedures more generally. The text of this talk as well as a partial English translation are included.

§1. Behmann's Career. Heinrich Behmann was born January 10, 1891, in Bremen. In 1909 he enrolled at the University of Tübingen. There he studied mathematics and physics for two semesters and then moved to Leipzig, where he continued his studies for three semesters. In 1911 he moved to Göttingen, at that time the most important center of mathematical activity in Germany. He volunteered for military duty in World War I, was severely wounded in 1915, and returned to Göttingen in 1916. In 1918, he obtained his doctorate with a thesis titled *The Antinomy of Transfinite Numbers and its Resolution by the Theory of Russell and Whitehead* [*Die Antinomie der transfiniten Zahl und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead*] under the supervision of David Hilbert [Behmann 1918]. The thesis is devoted to a reconstruction of the theory of *Principia Mathematica* motivated by a desire for removing a number of unclarities as well as by an attempt to put the project of *Principia* squarely in an empiricist framework. Recent scholarship [Mancosu 1999, 2003] has brought to light Behmann's pivotal role in the understanding and appreciation of *Principia* in Göttingen, thereby providing some essential pieces connecting Russell's and Whitehead's project with the development of logic and the foundations of mathematics in Hilbert's school. Behmann then started to work on the decision problem

1991 *Mathematics Subject Classification.* 01A60, 03-03.
Key words and phrases. Heinrich Behmann, David Hilbert, decision problem, decision procedure, algebra of logic.


H. Behmann
Foto Matzen - Göttingen.

in logic, for which he coined the term "Entscheidungsproblem". In 1921 Behmann obtained his *Habilitation* with a thesis titled *Contributions to the Algebra of Logic, in particular to the Decision Problem* [*Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem*]. On May 10, 1921, Behmann reported his results to the Göttingen Mathematical Society [Behmann 1921]; the text of this lecture is reproduced below. The results were subsequently published in an article in *Mathematische Annalen* [Behmann 1922]. With the *Habilitation* he was conferred the *venia legendi*, which allowed him to work and teach as *Privatdozent* in the Department of Mathematics in Göttingen from 1921 to 1925. In 1925 he became professor at the University of Halle.

Behmann was not only in close contact with his colleagues in Göttingen (most prominently Hilbert and Bernays, but also with Wilhelm Ackermann and Moses Schönfinkel) but during the 1920s he also actively collaborated with a number of people interested in scientific philosophy such as Carnap and Felix Kaufmann. A visit to Vienna in 1930 gave rise to an interesting attempt (alas, failed) to show that classical mathematics is for the most part intuitionistically justifiable (for the analysis of the full episode, which also involved Gödel and Wittgenstein, see Mancosu [2002], [2003]). Behmann is also known for an interesting solution to the paradoxes of set theory that has been revived and discussed in the literature on truth (see Parsons [2003] and Thiel [2002] for the historical context). On account of his affiliation with the NSDAP he was dismissed from his position in Halle in 1945. Fearing deportation, he fled Soviet-occupied Saxony to his home town Bremen in 1946. Due in part to his wartime injury, he was unable to obtain academic employment. He died in Bremen on February 3, 1970. Behmann's extensive *Nachlaß* was for many years in Aachen and later Erlangen, and is now housed at the Staatsbibliothek zu Berlin. See Haas and Stemmler [1981] for additional detail on Behmann's life and work and an overview of Behmann's papers.

§2. The Decision Problem: from the Algebra of Logic to *Principia*. The reference to the "decision problem" in the title of Behmann's lecture may well be the first time the expression made its public appearance. Behmann claimed to have coined the word on several occasions. For instance, he wrote to Russell in 1922:

> It was what I call the Problem of Decision, formulated in the said paragraph [¶1 of Behmann [1922]] that induced me to study the logical work of Schröder. And I soon recognized that, in order to solve my particular problem, it was necessary first to settle the main problem of Schröder's Calculus of Regions, his so-called Problem of Elimination. [...] Indeed, the chief merit of the said problem [the Decision Problem] is, I daresay, due to

> the fact that it is a problem of fundamental importance on its own account, and, unlike the applications of earlier Algebra of Logic, not at all imagined for the purpose of symbolic treatment, whereas, on the other hand, the only means of any account for its solution are exactly those of symbolic logic. (Behmann to Russell, August 8, 1922. Russell Archive, McMaster University)

In a letter to Scholz (December 27, 1927, Behmann Archive, Staatsbibliothek zu Berlin), Behmann claims to have been the first to "explicitly" [*ausdrücklich*] pose the general decision problem. The *general* decision problem is the extension of the decision problem from propositional logic to full logic. In the same letter, he grants that related problems had emerged in the algebra of logic tradition but that the full problem had not been stated before him. He also stresses that one should not confuse this "Entscheidungsproblem" with the "Entscheidungsproblem" formulated, in connection to Grelling's paradox, by Hessenberg [1906]. Behmann also points to the connection between the decision problem and the "elimination problem" central to the algebra of logic. He says that the elimination problem must be considered to be independent of the general decision problem while it is at the same time a special case of it. Behmann mentions Peirce, Schröder, and Löwenheim as among the most important contributors to work on the elimination problem. (Here it is important to point out that Behmann achieved his important results on the decidability of the monadic second-order predicate calculus independently of Löwenheim, whose work he discovered after he had found the result.) In the same letter to Scholz, Behmann mentioned that the he had learned the solution of the decision problem for propositional logic using normal forms directly from Hilbert.[1]

Moving now to the lecture, let us begin by pointing out that in his [1922], Behmann made explicit what in his lecture he only presupposes, namely that "As specifically Peano and Russell have seen, every mathematical proposition can fundamentally be thought of as a purely logical state of affairs."[2] Since, thanks in particular to the work of Whitehead and Russell, all of logic can be axiomatized, it follows from the expressibility of every mathematical statement as a logical one that every mathematical question could be decided if it were possible to decide for every logical sentence whether it could be derived from the axioms.

[1] Already Hilbert [1905] considered conjunctive and disjunctive normal forms and decidability of propositional logic. The first explicit discussion of the decision problem for propositional logic was given in Bernays [1918], but the essential idea is found in Hilbert [1917/18]; see Zach [1999] for discussion).

[2] "Wie namentlich Peano und Russell erkannt haben, läßt sich in der Tat jeder mathematische Satz letzlich als ein rein logischer Sachverhalt auffassen" (Behmann [1922], p. 166, note 1).

And this leads to the claim, made in Behmann's lecture in 1921 and in Behmann [1922, p. 166], that a solution of this problem would transform mathematics into "one enormous triviality."[3] To repeat, while the connection is left implicit in the 1921 lecture, it is also obviously presupposed in the way the lecture moves from a reflection on mathematics to the full decision problem. In the lecture, Behmann continues by asserting that the fact that logic (and hence mathematics) can be axiomatized is not enough to turn mathematics into a triviality, for the rules of derivation tell us "only what one may do, and not what one should do." Behmann then describes the decision problem as the more specific problem of finding a deterministic, computational procedure to decide any mathematical claim:

> [We require] not only the individual operations but also the *path of calculation* as a whole should be specified by rules, in other words, *an elimination of thinking in favor of mechanical calculation.* If a logical or mathematical assertion is given, the required procedure should give complete instructions for determining whether the assertion is *correct or false by a deterministic* [*zwangsläufig*] *calculation after finitely many steps.* The problem thus formulated I want to call the *general decision problem.*

While Behmann's programmatic remarks are noteworthy for their analysis of the significance of the decision problem, and for his emphasis on deterministic computation, neither they nor the methods for solving the decision problems developed by him yet amount to a coherent analysis of the notion of deterministic computational procedure.

In order to make headway on the decision problem for logic, Behmann suggests that the axiomatic approach is unsuitable, and that one instead has to adopt the perspective of the algebra of logic. As mentioned above, Behmann saw the decision problem as connected to the elimination problem in the algebra of logic tradition, and so he found it necessary to work through it. We cannot here give a full explanation of the elimination problem in the algebra of logic, which is itself only a sub-problem of what is usually called the "solution problem" [*Auflösungsproblem* in Schröder]. The latter problem was already stated by Boole. Basically, the idea is that from a set of logical equations (usually containing unknowns) one would

[3]Bernays [1918] also suggested that the decision procedure for propositional logic reduces it to triviality. The idea that a decision procedure for all of logic would trivialize mathematics led von Neumann [1927], on the other hand, to doubt that such a procedure can be found (cf. [Gandy 1995], §5.2). Weyl [1927] similarly writes, "Completeness in this sense would only be ensured by the establishment of such procedural rules of proof as would lead demonstrably to a solution for every pertinent problem. Mathematics would thereby be trivialized. But such a philosopher's stone has not been discovered and never will be discovered" (p. 20; p. 24 of the translation). Behmann also compares a decision method to the "philosopher's stone" in the lecture.

like to find (some or all) "solutions" for such equations, namely values of the variables that make the equations true. In the hands of Schröder, this process leads to the study of the "resultants" $r_P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ of an equation which eliminates a variable y from an equivalent polynomial inequality of the form $P(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$. The "elimination" problem is the determination of such "resultants" (for a detailed analysis and further references see Bondoni [2007], [2009]). Rather than attempting a presentation of the context of the two problems within the algebra of logic tradition, let us mention how they emerge within the second-order predicate calculus with binary predicates (the restriction to unary predicates or the generalization to n-ary ($n > 2$) predicates is immediate). In the decision problem one only investigates the validity, or lack thereof, of any well-formed formula A of the calculus. In the elimination problem, one also asks for a well-formed formula B that is logically equivalent to A but simpler (thereby simplifying the determination of its validity or lack thereof). For instance, given the formula

$$\exists X \forall x \forall y((Xxy \vee Axy) \wedge (\neg Xxy \vee Bxy))$$

we might want a first-order formula equivalent to it. It is not too hard to check that

$$\forall x \forall y(A(x, y) \vee B(x, y))$$

is one such formula. This is the "resultant" of the elimination problem (see Ackermann [1934]). According to Ackermann, the decision problem is actually a special case of the elimination problem. Behmann's result provides a solution to the elimination problem for formulas containing monadic predicate variables and this immediately yields the solution to the decision problem for the same class of formulas. Neither the elimination nor the decision problem for variable binary predicates admits of a general solution. We now describe Behmann's result.

§3. Behmann's Result. Behmann's result was first announced in his May 1921 lecture and published the next year in *Mathematische Annalen* [Behmann 1922]. Behmann also reported it in September 1923 at the annual meeting of the German Mathematical Society in Marburg [Behmann 1923]. The result gives a method for deciding, given a formula of monadic second-order logic, whether it is valid [*allgemeingültig*]. Behmann considers three classes of formulas: domain A is the class of first-order formulas with monadic predicate symbols (but without identity), domain B is the class of second-order formulas with monadic predicate variables (but without identity), and B^* is B plus the identity predicate. Behmann's aim is to solve the elimination problem for B^*, i.e., to show that any monadic second-order formula is equivalent to a first-order formula. Behmann did not have a precise semantics for his languages available, so the solution to the decision problem, for him, involved finding a procedure to determine whether a given formula was true under its intuitive interpretation for every possible domain. Since formulas with predicate constants do not express determinate propositions independently of an interpretation of the predicate symbols, Behmann's notion of validity properly applies only to second-order sentences containing no predicate constants. For instance, Behmann considers the decision problem to apply not to formulas like $\forall y(Ay \vee \neg Ay)$, but only to sentences such as $\forall X \forall y(Xy \vee \neg Xy)$. Solving the elimination problem for such sentences, then, would show that they are each equivalent to a first-order sentence involving no extralogical symbols, only identity, and hence expresses a condition on the size of the domain. The sentence is valid if and only if the condition is compatible with any size of the domain whatsoever.

In keeping with the tradition of using normal forms in the investigation of questions like the decision problem, Behmann considers which special forms formulas can be brought into. If all predicate symbols are monadic, then every formula is equivalent to a formula which is a propositional combination of formulas of the form $\forall x(A_1x \vee \cdots \vee A_nx)$ and $\exists x(A_1x \wedge \cdots \wedge A_nx)$, where A_ix is atomic or the negation of an atomic formula.

Second-order quantifiers $\forall X$ and $\exists X$ distribute over $\wedge$ and $\vee$, respectively, just like first-order quantifiers do. Behmann is thus able to reduce the problem to that of removing the second-order quantifier from a formula of the form $\exists X\, \phi$ where ϕ is a conjunction of formulas of the forms $\forall y(Fy \vee Xy)$, $\forall y(Fy \vee \neg Xy)$, $\exists y(Fy \wedge Xy)$, and $\exists y(Fy \wedge \neg Xy)$. Each of these formulas can be translated into Behmann's own version of class notation (this notation expresses certain relationships between the classes denoted by F and X, e.g., $\exists y(Fy \wedge Xy)$ expresses that $F \cap X \neq \emptyset$). Behmann's notation is more flexible than the class-calculus notation of Schröder, who had been unable to solve the elimination problem even for the monadic case. However, the first-order equivalents obtained by Behmann for formulas in "main elimination form" in general will contain identity. In the last part of his paper, then, Behmann generalizes the procedure to formulas of domain B^*. His generalized class notation then contains as basic expressions formulas that state that the intersection of several classes contains at least n objects, and its dual, that the union of several classes contains all *but* n objects. The elimination problem is solved by showing that a second-order quantifier can be removed from a conjunction (in the case of $\exists X$) or disjunction (in the case of $\forall X$) of such expressions. If the original second-order formula contains no predicate or individual constants, the resulting formula is a propositional combination of statements of the form "there are at least n objects" and "there are at most n objects".

§4. Further Developments. For anyone familiar with the standard textbook proof of the decidability of monadic logic, Behmann's proof seems terribly unwieldy—and surprisingly so, since the usual method is so simple. The usual method consists in showing that if the sentence has a countermodel, it has a finite countermodel of a size depending on the number of predicate symbols in the sentence (specifically, 2^k for k the number of predicate symbols). Since one can check all such potential countermodels, the question is decidable. This method of solving the decision problem for monadic sentences was first outlined by Hilbert and Bernays [1922/23] in a lecture course in the Winter semester of 1922/23. Parts of the relevant sections of the lecture notes were later incorporated almost verbatim into the textbook by Hilbert and Ackermann [1928].

In the same semester, the Russian mathematician Moses Schönfinkel outlined a decidability proof for validity of sentences with a single binary predicate symbol in prenex form with the quantifier prefix $\exists x \forall y$. The manuscript containing the proof remains unpublished, but Bernays published a paper containing the result, extended to sentences with an arbitrary number of binary predicate symbols, in 1927. The result was generalized a year later by Ackermann [1928], who showed that validity of formulas with quantifier prefix $\exists^*\forall\exists^*$ is decidable. The paper by Bernays and Schönfinkel [1928] is notable, then, not for the proof of decidability of the special case of the Ackermann class, but for three other contributions. The first is the observation that instead of deciding validity of formulas, it is easier to focus on *satisfiability*—a concept that Bernays likely adopted from Skolem and Löwenheim. Note that no definition of model was available yet, and neither validity nor satisfiability were defined precisely. The second was the first proof in print of the decidability of satisfiability of monadic sentences by giving a bound on the size of models. The same approach is used in most subsequent papers on the decision problem. Indeed, already Ackermann's paper the following year established the result mentioned by proving that the class of prenex sentences of the form $\forall^*\exists^* A$ is "finitely controllable." Bernays's third contribution—and the contribution for which the paper is mainly known—is the proof of the decidability of satisfiability of sentences in the so-called Bernays-Schönfinkel class (prenex sentences of the form $\exists^*\forall^* A$).

Hilbert mentioned the decision problem as one of the main open problems in the foundations of mathematics in his address to the 1928 International Congress of Mathematicians in Bologna [Hilbert 1928a, 1928b]; it is also mentioned prominently in the textbook by Hilbert and Ackermann [1928]. Subsequently, a number of other logicians not directly connected to Hilbert's group in Göttingen contributed partial solutions to the decision problem. These include Ramsey, Herbrand, Kálmar, and Gödel. A good presentation of the solvable cases of the decision problem up to the 1950s is given by Ackermann [1954]. More comprehensive treatments can be found in Dreben and Goldfarb [1979] and Börger, Grädel, and Gurevich [1997].

The general case of the decision problem for logic was shown to be unsolvable in 1935–36, independently by Church [1936] and Turing [1937]. This result relied not only on the work of Gödel [1931], but it required in particular mathematically precise and general definitions of computational procedures, in particular, decision procedures. Church's notion of lambda-definable functions and Turing machines provided some of the first such definitions. They were anticipated by related work carried out by Emil Post in the 1920s, who, however, never published it.[4] Behmann's contribution to the decision problem, like other algorithmic methods for solving mathematical problems, was in the first instance an example of such a computational decision procedure. The significance of Behmann's lecture lies mainly in the clear articulation of the very general nature of the problem to be decided—essentially, every mathematical question—and his incisive reflections in the programmatic part of his lecture on the nature of computational processes.

Acknowledgments. We would like to thank the Staatsbibliothek zu Berlin for permission to publish Behmann's lecture, Prof. Christian Thiel for originally providing access to Behmann's papers, and Johannes Hafner for his help in typesetting the German text. Behmann's portrait is held by the Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. Hilbert 754, Bl. 22, Nr. 114, and reproduced here by their kind permission. Suggestions and comments by Patricia Blanchette, Christian Thiel, and above all an anonymous referee, have improved the presentation. Richard Zach would like to acknowledge the support of the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada.

References

Wilhelm Ackermann [1928], *Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke*, ***Mathematische Annalen***, vol. 100, pp. 638–649.

Wilhelm Ackermann [1934], *Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik*, ***Mathematische Annalen***, vol. 110, pp. 390–413.

[4]Post [1921] does mention a decision procedure for a "deductive system involving primitive propositions of but one argument," but this system was propositional only. See Urquhart [2009] for discussion of Post [1965], and Gandy [1995] for a historical survey of the development of notions of computability.

Wilhelm Ackermann [1954], ***Solvable cases of the decision problem***, North-Holland, Amsterdam.

Heinrich Behmann [1918], *Die Antinomie der transfiniten Zahl und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead*, ***Dissertation***, Universität Göttingen, 352 pp.

Heinrich Behmann [1921], *Entscheidungsproblem und Algebra der Logik*, unpublished manuscript dated May 10, 1921. Behmann Archive, Staatsbibliothek zu Berlin, Preußischer Kulturbesitz, Handschriftenabteilung, Nachl. 355 (Behmann), K. 9 Einh. 37.

Heinrich Behmann [1922], *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem*, ***Mathematische Annalen***, vol. 86, pp. 163–229.

Heinrich Behmann [1923], *Algebra der Logik und Entscheidungsproblem*, ***Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2. Abteilung***, vol. 32, pp. 66–67.

Paul Bernays [1918], *Beiträge zur axiomatischen Behandlung des Logik-Kalküls*, ***Habilitationsschrift***, Universität Göttingen, Bernays Nachlaß, WHS, ETH Zürich Archive, Hs 973.192. Edited in Ewald and Sieg [2013], pp. 222–271.

Paul Bernays and Moses Schönfinkel [1928], *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik*, ***Mathematische Annalen***, vol. 99, pp. 342–372.

Davide Bondoni [2007], ***La teoria delle relazioni nell'algebra della logica schröderiana***, LED Edizioni, Milan.

Davide Bondoni [2009], *Peirce and Schröder on the Auflösungsproblem*, ***Logic and Logical Philosophy***, vol. 1, pp. 15–31.

Egon Börger, Erich Grädel, and Yuri Gurevich [1997], ***The classical decision problem***, Springer, Berlin.

Alonzo Church [1936], *A note on the Entscheidungsproblem*, ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 1, pp. 40–41.

Burton Dreben and Warren Goldfarb [1979], ***The decision problem***, Addison-Wesley.

William Ewald and Wilfried Sieg (editors) [2013], ***David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933***, David Hilbert's Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics, 1891–1933, vol. 3, Springer, Berlin and Heidelberg.

Robin Gandy [1995], *The confluence of ideas in 1936*, ***The universal Turing machine*** (Rolf Herken, editor), Springer, Secaucus, NJ, 2nd ed., pp. 51–102.

Kurt Gödel [1931], *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme I*, ***Monatshefte für Mathematik und Physik***, vol. 38, pp. 173–198, Reprinted and translated in Gödel [1986], pp. 144–195.

Kurt Gödel [1986], ***Collected works***, vol. 1, Oxford University Press, Oxford.

Gerrit Haas and Elke Stemmler [1981], *Der Nachlass Heinrich Behmanns*, Aachener Schriften zur Wissenschaftstheorie, Logik und Logikgeschichte 1.

Gerhard Hessenberg [1906], *Grundbegriffe der Mengenlehre*, ***Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge***, vol. 1, pp. 479–706.

David Hilbert [1905], *Logische Principien des mathematischen Denkens*, Vorlesung, Sommer-Semester 1905. Lecture notes by Ernst Hellinger. Unpublished manuscript, 277 pp. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen..

David Hilbert [1917/18], *Prinzipien der Mathematik*, Vorlesung, Winter-Semester 1917/18. Lecture notes by Paul Bernays. Typescript, Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen. Edited in Ewald and Sieg [2013], pp. 59–221.

David Hilbert [1928a], *Die Grundlagen der Mathematik*, ***Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität***, vol. 6, pp. 65–85, Reprinted in

Ewald and Sieg [2013], pp. 917–942. English translation in Heijenoort [1967], pp. 464–479.

DAVID HILBERT [1928b], *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, ***Atti del congresso internazionale dei matematici. 3–10 September 1928, Bologna*** (Nicola Zanichelli, editor), Reprinted in Ewald and Sieg [2013], 954–966, pp. 135–141.

DAVID HILBERT AND WILHELM ACKERMANN [1928], ***Grundzüge der theoretischen Logik***, 1st ed., Springer, Berlin, Reprinted in Ewald and Sieg [2013], 806–916.

DAVID HILBERT AND PAUL BERNAYS [1922/23], *Logische Grundlagen der Mathematik*, Vorlesung, Winter-Semester 1922/23. Lecture notes by Paul Bernays, with handwritten notes by Hilbert. Hilbert-Nachlaß, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Cod. Ms. Hilbert 567. Edited in Ewald and Sieg [2013], pp. 528–564.

PAOLO MANCOSU [1999], *Between Russell and Hilbert: Behmann on the foundations of mathematics*, this BULLETIN, vol. 5, no. 3, pp. 303–330.

PAOLO MANCOSU [2002], *On the constructivity of proofs. A debate among Behmann, Bernays, Gödel, and Kaufmann*, ***Reflections on the foundations of mathematics. Essays in honor of Solomon Feferman*** (Wilfried Sieg, Richard Sommer, and Carolyn Talcott, editors), Lecture Notes in Logic 15, Association for Symbolic Logic, pp. 346–368.

PAOLO MANCOSU [2003], *The Russellian influence on Hilbert and his school*, ***Synthese***, vol. 137, no. 1–2, pp. 59–101.

CHARLES PARSONS [2003], *Introductory note to Gödel's correspondence with Heinrich Behmann*, ***Kurt Gödel: Collected works*** (Solomon Feferman et al., editors), vol. 4, Oxford University Press, Oxford, pp. 13–19.

EMIL L. POST [1921], *On a simple class of deductive systems (abstract)*, ***Bulletin of the American Mathematical Society***, vol. 27, no. 9–10, pp. 396–397.

EMIL L. POST [1965], *Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions: Account of an anticipation*, ***The undecidable*** (Martin Davis, editor), Raven Press, Hewlett, NY, pp. 340–433.

CHRISTIAN THIEL [2002], *Gödels Anteil am Streit über Behmanns Behandlung der Antinomien*, ***Wahrheit und Beweisbarkeit. Leben und Werk Kurt Gödels*** (Eckehard Köhler et al., editors), vol. 2, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, pp. 387–394.

ALAN M. TURING [1937], *On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem"*, ***Proceedings of the London Mathematical Society, 2nd Series***, vol. 42, pp. 230–265.

ALASDAIR URQUHART [2009], *Emil Post*, ***Logic from Russell to Church*** (Dov Gabbay and John Woods, editors), Handbook of the History of Logic, vol. 5, North-Holland, Amsterdam, pp. 617–666.

Jean van Heijenoort (editor) [1967], ***From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931***, Harvard University Press, Cambridge, Mass..

JOHANN VON NEUMANN [1927], *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, ***Mathematische Zeitschrift***, vol. 26, pp. 1–46.

HERMANN WEYL [1927], ***Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft***, Oldenbourg, Munich, Augmented and revised English translation by Olaf Helmer, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Princeton: Princeton University Press, 1949).

RICHARD ZACH [1999], *Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic*, this BULLETIN, vol. 5, no. 3, pp. 331–366.

Decision problem and algebra of logic. The translation of the first seven pages of Behmann's lecture is by Richard Zach. For readability, underlining in Behmann's manuscript has been incorporated (as italics) only sparingly, and editorial emendations other than pagination has been omitted in the translation. The complete text in the original German follows below.

Decision problem and algebra of logic May 10, 1921

A couplet, which goes something like this:

Sunt mathematici veri natique poeta;
sed, quae finxerant, hos probare decet.

is due, as far as I know, to Kronecker. In translation:

We mathematicians are true poets with a calling;
But we still must prove our poetry!

And we will have to admit that there is something true in these words. The work of the mathematician can indeed be compared with that of the poet, or generally with that of a creative artist. They, too, need *imagination*, in order to obtain a sufficiently large range of possibilities and to focus on certain conceivable connections between facts or between thoughts for carrying out their investigations; they need *trained sensitivity* for identifying the correct one among a dizzying array of possibilities, and for making lucky guesses of so far unsuspected states of affairs; they need *subtlety* to present their results in their suitable form. As Boltzmann once said, "among all artists, the mathematician is closest to the demiurge."

At the same time, the mathematician is not just a creative artist, but—and this tears us at once from our aesthetic speculation—they are subject
2 to the additional requirement, | to which Kroneker points in his couplet, that their creations—if we can call it that—must withstand the sharpest test of critical reason. They ought not just to *assert* theorems, even if they are beautiful and correct, but they must also *prove* them, and with it add them to the store of secured knowledge. No other science sets up this requirement with the same inexorable rigor, and anyone who understands the nature of mathematics will not attempt to haggle to weaken it, but instead to tighten it as much as possible.

There is now no doubt that in practice this very same requirement is an extremely significant burden for the mathematician. The reason for this is roughly the following:

While in the beginning mathematics—and this is not just true for mathematics as a whole but for every single one of its disciplines, regardless of how early or late they may have come to be developed—always first focuses on *specific single problems* and attempts to solve them with whatever methods it already has at its disposal, it nevertheless, in the course of its development, eventually develops *general methods* for *wide classes* of problems (even if these methods do not solve every problem of a certain

kind). The problems to which these methods apply then do not require any *inventive insight* but only the calculatory tools provided. Once this is accomplished, the path to a solution no longer goes by *searching* and *cutting a trail* in every direction of the compass, but it is now *completely given,* | fully developed, and furnished with clear markers; now the path, 3
as I would like to put it, *inevitably* leads to the destination. The *problem* has thus turned into a mere *exercise in computation*.

Unfortunately the kind of progress I have just characterized is nowhere to be found when the problem is that of *proving mathematical propositions*. The attitude long left behind in the case of mathematical problems in general still applies in the case of proving mathematical theorems: it indeed requires a *new, creative thinking for each case*, a lucky insight which of course can never be forced even with the most enormous of efforts. The task of *verifying the validity of a given mathematical claim* at first presents itself as being of a very different nature than that of solving a cubic equation or of carrying out the Gaussian interpolation algorithm. For the latter we know *that* we can always find a solution as well as *how* to find it, for the former neither one nor the other. For the latter, we have fully developed, perspicuous and deterministic procedures, for the former the important aspect requires instinct, a serendipitous intuition. We are thus unfortunately still far from being able to delegate the work of proving mathematical theorems to mathematical laborers, in the way we are regarding numerical calculations.

At first glance the development of a general, deterministic procedure for proving mathematical propositions may seem like a *hopeless, indeed ludicrous endeavor,* | perhaps comparable to the medieval quest for the 4
philosopher's stone. And indeed the achievement of this goal would be no less significant than the wonders believed to be inherent in that mythical substance for not just mathematics but for knowledge as a whole. If we look more closely, the entirety of mathematics would indeed be transformed into one *enormous triviality*; we would be able to solve every problem posed to us—perhaps not in the intended sense, which may be impossible—, but at least in the sense in which it can be solved at all, as set out by Hilbert in his Paris address “Mathematical Problems.”

From a purely mathematical perspective, however, there does indeed appear to be no possibility for attacking this problem in its enormous variety, say, by dividing mathematical propositions into classes according to their complexity and by advancing from the simple to the more difficult.

Nevertheless we have, or so I would like to claim, attained a level of knowledge in an area which is not directly mathematical, but indeed *much more fundamental*, that we *not only have the ability* but *every right* to formulate this problem explicitly and rigorously and to begin its investigation. Indeed we must *descend to a lower level*, since we are really no longer

working on a properly mathematical problem, but a "supramathematical" problem. This lower level is *symbolic logic*, which has been anticipated by
5 Leibniz, first taken on by Boole, | and developed extensively by Schröder, Frege, Peano, and Russell.

In fact, at its present state of development, it already provides us with the ability to formulate the problem in a relatively simple and transparent form, by allowing us to express all propositions in questions in a uniform way using just a few symbols. Specifically, we can express *every logical or mathematical proposition with the following few words alone:*

				Begriff			
(proposition)	*not*	*or*	*object*	*property*	*relation*		
p	$\overline{p}$	$p\,q$	a	f^x, F^ϕ	f^{xy}		
					satisfies	*all*	*identical*
					f_a, f_{ab}	$x f_x$	$a = b$

Of course this does not mean that in practice one always has to carry out the reduction this far; instead, one will introduce new signs, as far as is desirable for the particular application, for other concepts, such as *and, there are, the class, the numbers, the operation, etc.*

With this insight we already have made progress. We now only have to consider *expressions formed according to rules from these symbols* and thus have cast off the bonds of natural language.

As is well known, symbolic logic can be *axiomatized*, i.e., reduced to a system of relatively few basic formulas and rules, so that proving theorems now appears to be a mere computational procedure. One only has to write down new formulas to formulas already given, where the rules already specify what may be written down in every case. Proving then has taken
6 on the *nature of a game*. It is similar to, | say, chess, where by moving one's own pieces, perhaps while removing one of the opponent's pieces, one transforms a given position into a new one, where only the movement of one's own piece and the removal of the opponent's must be allowed by the rules of the game.

But this very comparison brings out quite starkly that the view of symbolic logic just detailed cannot suffice at all for our problem. For it shows us, like the rules of chess, *only what one may do*, and *not what one should do*. The latter remains—in the one as in the other case—a question of inventive *thinking*, of lucky *combination*. We, however, require a lot more: not only the individual operations but also the *path of calculation* as a whole should be specified by rules, in other words, *an elimination of thinking in favor of mechanical calculation*. If a logical or mathematical statement is given, the required procedure should give complete instructions for determining whether the statement is *correct or* *false by a deterministic calculation after finitely many steps.* The problem thus formulated I want to call the *general decision problem.*

It is essential to the character of this problem that as method of proof only *entirely mechanical calculation* according to given instructions, without any activity of thinking in the narrower sense, is allowed. One might, if one wanted to, speak of *mechanical* or *machine-like thinking.* (Perhaps one can one day even let it be carried out by a machine.) | 7

It is thus not merely symbolic logic as such that is required, but a *specific direction within symbolic logic*, which not only investigates how one *may* compute, but how one *should* compute in order to attain a given goal. For a particular historical reason I would like to call this direction that of the *algebra of logic*, specifically because all important preparatory work in this area are subsumed under this name of algebra of logic (Boole, De Morgan, Peirce, Schröder). This subsumption is perhaps only accidental, since none of those just mentioned have seriously considered an application to the decision problem. But also in regards to its substance the name seems to me to be somewhat appropriate, since this narrower domain will have precisely the development of *algorithms*, i.e., deterministic procedures, such as those in algebra for finding solutions to equations, as its aim. I consider it a fortuitous coincidence that here we are afforded an opportunity to summarize these, in their superficial form relatively dubious and obscure—if not to say: boring and tedious—investigations under a *new, unified and valuable perspective*, and with it to save a large amount of deep and arduous intellectual labor from the inglorious fate of slowly mouldering away in libraries. For, as far as I can tell, general interest in the investigations of that older algebra of logic has almost completely ceased even among proponents of symbolic logic. | 8

I do not have to emphasize that despite all this we are today still *extremely far away* from a solution to the decision problem formulated above. At least I have succeeded in completely carrying through this problem for a certain *modest domain of propositions*, which nevertheless already contains quite a significant variety of propositions. It is this work, on which I would like to speak to you in particular.

Entscheidungsproblem und Algebra der Logik. The following manuscript by Heinrich Behmann, entitled "Entscheidungsproblem und Algebra der Logik," is the text to a lecture Behmann gave in the Göttingen Mathematical Society on May 10, 1921. The date and venue of the lecture are attested in the list of events at the *Mathematische Gesellschaft in Göttingen* in ***Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*** 30 (1921), 2. Abteilung, p. 47. The manuscript is part of the

Behmann papers held at the Staatsbibliothek zu Berlin, Preußischer Kulturbesitz, Handschriftenabteilung under call number Nachl. 355 (Behmann), K. 9 Einh. 37, and is reproduced here by their kind permission.

Underlining in red pencil in the original is rendered as italics, except for formulas in the running text. Words or passages crossed out by Behmann are enclosed in double square brackets, $[\![\dots]\!]$. Authorial insertions are enclosed in double angle brackets $\langle\!\langle\dots\rangle\!\rangle$. Words or phrases enclosed in single angle brackets $\langle\dots\rangle$ and single square brackets $[\dots]$ by Behmann himself are displayed in the same way in the transcription. Page breaks
1 are indicated by | in the running text and the page number in the margin.

Entscheidungsproblem und Algebra der Logik 10. Mai 1921.

Von *Kronecker* stammt, soviel ich weiß, ein *Distichon*, das ungefähr so lautet:

> Sunt mathematici veri natique poeta;
> sed, quae finxerant, hos probare decet.

In Übersetzung:

> Wir Mathematiker auch sind echte, berufene Dichter;
> uns liegt noch der Beweis für das Gedichtete ob!

Und man wird zugeben müssen, daß *etwas Wahres* in diesen Worten liegt. Die *Arbeit des Mathematikers* läßt sich in der Tat bis zu einem gewissen Grade $\langle\!\langle$wohl$\rangle\!\rangle$ mit der des *Dichters* oder allgemeiner überhaupt des *schaffenden Künstlers* vergleichen. Auch er bedarf der *Phantasie*, um für die Durchführung seiner Untersuchung von vornherein einen hinreichenden Kreis von Möglichkeiten zu gewinnen und gewisse denkbare Tatsachen- oder Gedankenzusammenhänge ins Auge zu fassen, des *geschulten Gefühls*, um aus der mitunter verwirrenden Vielzahl von Möglichkeiten gerade die richtige herauszufinden, bisher nicht vermutete Sachverhalte glücklich zu erraten, des *feinen Taktes*, um seine Ergebnisse in der ihnen angemessensten Form darzustellen. Wie *Boltzmann* einmal gesagt hat, „*kommt der Mathematiker unter allen Künstlern dem Weltenschöpfer am nächsten.*"

Indessen: der Mathematiker ist nun nicht bloß schaffender Künstler, sondern — und dies reißt uns mit einem Schlage aus unserer ästhetischen
2 Betrachtung heraus — für ihn besteht noch die *zusätzliche Forderung*, | auf die *Kronecker* in seinem Distichon hinweist, daß seine „Schöpfung" — wenn wir so sagen dürfen — auch die *schärfste Probe des kritischen Verstandes* aushalten muß. Er soll nicht bloß Sätze *aufstellen*, und seien sie noch so schön und richtig, sondern er soll sie auch *beweisen* und damit erst dem bisherigen gesicherten Erkenntnisbesitz einfügen. In keiner anderen Wissenschaft wird diese Forderung mit der *gleichen unerbittlichen Strenge* gestellt, und wer das Wesen der Mathematik recht versteht, sucht

von dieser Forderung *nicht etwas abzuhandeln*, sondern sie im Gegenteil so weit wie irgend tunlich noch zu *verschärfen*.

Es unterliegt nun aber keinem Zweifel, daß eben diese Forderung in der Praxis eine ganz ⟦*außerordentliche*⟧ ⟪*bedeutende*⟫ *Belastung* für den Mathematiker bedeutet. Und zwar ist der *Grund hierfür* wesentlich der folgende:

Während anfänglich die *Mathematik* — und zwar gilt dies nicht nur für die Mathematik im ganzen, sondern für *jedes einzelne ihrer Teilgebiete*, so früh oder so spät dieses auch zur tatsächlichen Entwicklung gekommen sein mag — immer zunächst *bestimmte einzelne Probleme* ins Auge gefaßt und diese nun auf irgend eine Weise mit den ihr bereits zu Gebote stehenden Mitteln zu bewältigen sucht, gelangt sie dessenungeachtet im Verlaufe ihrer Entwicklung mehr und mehr dahin, wenn auch nicht für alle Probleme von einer irgendwie bestimmten Natur, so doch für *ausgedehnte Klassen* solcher Probleme *allgemeine Verfahren* zu entwickeln, sodaß es für die von diesen Verfahren beherrschten Probleme dann *keines erfinderischen Scharfsinns*, sondern nur noch der Beherrschung der vorausgesetzten rechnerischen Hilfsmittel bedarf. Damit ist der Weg zur Lösung *nicht mehr* ein nach irgend einer Himmelsrichtung *zu suchender* und neu *zu bahnender*, sondern er ist nunmehr ein *fertig vorhandener*, | voll 3
ausgebauter und mit deutlichen Wegweisern versehener, der, wie ich sagen möchte, *zwangläufig* auf das Ziel hinführt. Das *Problem* ist damit gewissermaßen zur bloßen *Rechenaufgabe* geworden.

Von einer Entwicklung, wie ich sie eben kennzeichnete, ist nun in dem Falle, daß es sich um das *Beweisen mathematischer Aussagen* handelt, leider *nicht im entferntesten die Rede*. Was bei den mathematischen Problemen im allgemeinen längst überwundener Standpunkt ist: beim Beweisen mathematischer Sätze bedarf es in der Tat *von Fall zu Fall des neuen erfinderischen Gedankens*, einer glücklichen Eingebung, die sich bekanntlich auch durch die gewaltigste aufgewendete Mühe *niemals erzwingen* läßt. Die Aufgabe, *eine gegebene mathematische Behauptung auf ihre Gültigkeit zu prüfen* stellt sich ihrer Natur nach zunächst jedenfalls als eine ganz andere dar, als etwa diejenige, *eine kubische Gleichung aufzulösen* oder *eine Gaußsche Ausgleichungsrechnung durchzuführen*. Bei der *zweiten* wissen wir, *daß* wir die Lösung unbedingt finden können und *wie* wir sie finden können, bei der *ersten* weder das eine noch das andere. Bei der *zweiten* sind wir im Besitz vollständig ausgebauter, übersichtlicher und *zwangläufiger Verfahren*, bei der *ersten* bleibt das Wesentliche dem *Gefühl*, dem glücklichen *Ahnungsvermögen* überlassen. Wir sind also leider noch *weit davon entfernt*, daß wir die Arbeit des Beweisens aufgestellter Sätze etwa einem *mathematischen Hilfsarbeiter übertragen* können, wie dies hinsichtlich der Durchführung einer numerischen Rechnung möglich ist.

Auf den ersten Blick mag freilich die Aufstellung eines allgemeinen, zwangläufigen Verfahrens für das Beweisen mathematischer Aussagen als
4 ein *hoffnungsloses, ja wahnwitziges Unterfangen* erscheinen, | etwa vergleichbar dem mittelalterlichen Suchen nach dem *Stein der Weisen*. Und allerdings würde ja die Erreichung dieses Zieles an *Bedeutung* nicht nur für die Mathematik, sondern für unsere Erkenntnis überhaupt den Wundern, die man sich von jenem sagenhaften Stein versprach, gewiß nichts nachgeben. Es wäre in der Tat, wenn wir genauer zusehen, die ganze Mathematik in eine *ungeheure Trivialität* verwandelt; wir würden jede uns gestellte Aufgabe — zwar nicht notwendig in dem gemeinten Sinne lösen, was ja unmöglich sein kann —, aber doch, wie Hilbert dies in seinem Pariser Vortrag ⟦über⟧ „Mathematische Probleme" ausgeführt hat, in dem Sinne erledigen, in welchem es überhaupt einer Erledigung fähig ist.

Aber andererseits sieht man *vom rein mathematischen Standpunkt* in der Tat *gar keine Möglichkeit*, dieses Problems in seiner ungeheuren Vielgestaltigkeit irgendwie Herr zu werden, etwa die *mathematischen Aussagen* je nach dem Grade ihrer Verwicklung *in Klassen* einzuteilen und auf diese Weise *vom Leichteren zum Schwierigeren* fortzuschreiten.

Nichtsdestoweniger haben wir, wie ich behaupten möchte, heute bereits auf einem nicht unmittelbar mathematischen, sondern noch *viel grundlegenderen Gebiete* einen derartigen Erkenntnisstandpunkt erreicht, daß wir *nicht nur die Möglichkeit*, sondern auch ein *gutes Recht* haben, dieses Problem ausdrücklich und streng zu formulieren und in seine Untersuchung einzutreten. In der Tat müssen wir, da es sich hier im Grunde nicht mehr um ein eigentlich mathematisches, sondern gewissermaßen um ein *„übermathematisches" Problem* handelt, hier *eine Stufe tiefer* herabsteigen, und zwar zu der *symbolischen Logik*, wie sie von *Leibniz* vorausgeahnt,
5 von *Boole* | in Angriff genommen und von ⟨⟨Schröder,⟩⟩ *Frege*, *Peano* und *Russell* mächtig gefördert worden ist.

Tatsächlich gibt sie uns auf ihrem gegenwärtigen Entwicklungsstandpunkt bereits die Möglichkeit, das Problem auf eine *verhältnismäßig einfache und durchsichtige Form* zu bringen, indem sie uns eine einheitliche Darstellung aller in Betracht kommenden Aussagen durch ganz wenige Zeichen in die Hand gibt. Wir können nämlich ⟦grundsätzlich⟧ *jede logische oder mathematische Aussage* grundsätzlich *allein mit den folgenden wenigen Worten* ausdrücken:[5]

				⟨⟨ Begriff	⟩⟩
(Aussage)	*nicht*	*oder*	*Ding*	⟦*Begriff*⟧ ⟨⟨*Eigenschaft*⟩⟩	*Beziehung*
p	$\overline{p}$	$p\,q$	a	f^x, F^ϕ	f^{xy}

[5] Ed: The following table is originally arranged as follows: nicht, oder, alle, (Aussage), Begriff, Beziehung, erfüllt, identisch. Behmann indicates the corrected order by numbers pencilled in as well as a list in the margin.

erfüllt	*alle*	*identisch*
f_a, f_{ab}	xf_x	$a = b$

Natürlich ist damit nicht gesagt, daß man in der Praxis tatsächlich die Zurückführung immer so weit treiben müsse; vielmehr wird man auch für andere Begriffe, wie *und*, *es gibt*, ⟪die Klasse, die Zahlen und die Verknüpfung u.s.f.⟫, soweit es für den jeweiligen Zweck erwünscht ist, *neue Zeichen* einführen.

Mit dieser Erkenntnis ist nun immerhin *schon etwas gewonnen*. Wir brauchen jetzt nämlich überhaupt nur noch *aus den obigen Zeichen regelrecht gebildete Ausdrücke* in Betracht zu ziehen und haben uns damit der *Fesseln der Wortsprache* bereits entledigt.

Bekanntlich läßt sich die symbolische Logik *axiomatisieren*, d.h. auf ein System verhältnismäßig weniger Grundformeln und Grundregeln zurückführen, sodaß auch das *Beweisen von Sätzen* nunmehr als ein *bloßes Rechenverfahren* erscheint. Man braucht nur noch zu gegebenen Formeln neue hinzuschreiben, wobei durch Regeln bereits festgelegt ist, was man jeweils hinschreiben darf. Das Beweisen hat sozusagen den *Charakter eines Spieles* angenommen. Es ist etwa | wie beim *Schachspiel*, wo man 6
durch *Verschieben* eines der eigenen Steine, gegebenenfalls mit *Wegnahme* eines gegnerischen, die *jeweils* ⟦*gegebene*⟧ ⟪*vorliegende*⟫ *Stellung in eine neue* verwandelt, wobei nur das Verschieben und das Wegnehmen durch die *Regeln des Spieles* erlaubt sein muß.

Aber gerade dieser Vergleich zeigt uns auch in krasser Weise, daß uns der eben geschilderte *Standpunkt der symbolischen Logik* für unser Problem *noch keineswegs genügen* kann. Denn diese sagt uns wie die Regeln des Schachspiels *nur, was man tun darf*, und *nicht, was man tun soll*. Dies bleibt in dem einen wie in dem anderen Falle eine Sache des erfinderischen *Nachdenkens*, der glücklichen *Kombination*. Wir verlangen aber weit mehr: daß nicht etwa nur die erlaubten Operationen im einzelnen, sondern auch der *Gang der Rechnung selbst* durch Regeln festgelegt sein soll, m.a.W. *eine Ausschaltung des Nachdenkens zugunsten des mechanischen Rechnens*. Ist irgend eine logische oder mathematische Aussage vorgelegt, so soll das verlangte Verfahren eine vollständige Anweisung geben, wie man *durch eine ganz zwangläufige Rechnung nach endlich vielen Schritten* ermitteln kann, ob die gegebene Aussage *richtig oder falsch* ist. Das eben formulierte Problem möchte ich *das allgemeine Entscheidungsproblem* nennen.

Für das Wesen des Problems ist von grundsätzlicher Bedeutung, daß als Hilfsmittel des Beweises *nur das ganz mechanische Rechnen* nach einer gegebenen Vorschrift, ohne irgendwelche Denktätigkeit im engeren Sinne, zugelassen wird. Man könnte hier, wenn man will, von *mechanischem* oder *maschinenmäßigem Denken* reden. (Vielleicht kann man es später sogar durch eine Maschine ausführen lassen.) | 7

Es bedarf hier somit nicht bloß der symbolischen Logik als solcher, sondern vielmehr einer *besonderen Richtung innerhalb der symbolischen Logik*, die nicht nur untersucht, wie man rechnen *darf*, sondern wie man rechnen ⟦muß⟧ ⟨⟨*soll*⟩⟩, um ein gegebenes Ziel zu erreichen. Diese Richtung möchte ich nun aus einem bestimmten geschichtlichen Grunde als die der *Algebra der Logik* bezeichnen, und zwar darum, weil *alle wichtigen Vorarbeiten* auf diesem Gebiet bisher gerade unter diesem Namen der Algebra der Logik (*Boole*, *De Morgan*, *Peirce*, *Schröder*) vereinigt sind, ⟦und zwar⟧ *vielleicht nur zufällig* vereinigt sind, denn, soviel ich wenigstens aus Schröders Werk entnehmen konnte, hat wohl keiner der eben Genannten ernstlich an eine Anwendung auf das Entscheidungsverfahren dabei gedacht. Aber auch *sachlich* scheint mir dieser Name *einigermaßen passend* zu sein, weil dieses engere Gebiet eben die Ausbildung von *Algorithmen*, d.h. zwangläufigen Rechenverfahren, wie in der Algebra etwa für die Auflösung von Gleichungen, zur Aufgabe haben soll. Ich halte es geradezu für einen außerordentlich *glücklichen Umstand*, daß sich hier eine Gelegenheit darbietet, die bisher namentlich in der äußeren Form ziemlich fragwürdigen und schwer zugänglichen, ⟨um nicht zu sagen: langweiligen⟩ ⟨⟨eintönigen⟩⟩ Untersuchungen dieses Gebietes unter einem *neuen, einheitlichen und wertvollen Gesichtspunkt* zusammenzufassen und damit viel tiefe und beschwerliche Gedankenarbeit vor dem unrühmlichen Ende der langsamen Vermoderung in Bibliotheken zu bewahren. Denn, soweit ich urteilen kann, hatte sich das *allgemeine Interesse*, selbst bei den Vertretern der symbolischen Logik, von den Untersuchungen jener alten Algebra
8 der Logik in den letzten Jahrzehnten so gut wie *vollständig abgewandt.* |

Ich brauche wohl nicht erst ausdrücklich zu betonen, daß wir trotzalledem von der Lösung des vorhin formulierten Entscheidungsproblems heute noch *außerordentlich weit entfernt* sind. Immerhin ist es mir ⟦kürzlich⟧ gelungen, dieses Problem für einen gewissen *bescheideneren Bereich von Aussagen*,[6] der aber nichtsdestoweniger bereits eine recht bedeutende Mannigfaltigkeit von Aussagen aufweist, vollständig durchzuführen, und ⟨eben dies ist es, worüber ich im besonderen zu Ihnen sprechen möchte.⟩ ⟨⟨gerade darüber möchte ich in diesem Zusammenhang noch etwas sagen.⟩⟩

⟦Allerdings stehe ich dabei vor einer gewissen *praktischen Schwierigkeit.* Es handelt sich nämlich hier um eine Darstellung, die sich auf einem noch *neuen und ungewohnten Gebiet* bewegt und mit *völlig anderen Mitteln* arbeitet als man sonst in der Mathematik gewohnt ist. ⟨Dazu kommt, daß die Untersuchung ohnehin, zumal sie, was auf anderen Gebieten der Mathematik zumeist nicht nötig ist, *von Grund auf anfangen* muß, eine nicht unerhebliche Ausdehnung angenommen hat, die sich der verfügbaren Zeit nur sehr schlecht anpaßt.⟧ Daher ziehe ich es vor, hier *nur den Gedankengang* ⟨meiner Untersuchung⟩ anzugeben, ohne dabei auf Strenge und

[6] Ed: Noted in left margin: *heutiger Stand des Problems*.

Vollständigkeit der Darstellung allzuviel Gewicht zu legen. ⟦⟨Auch für das Verständnis scheint mir dieser Weg den Umständen nach der förderlichste zu sein.⟩⟧

Zunächst möchte ich einiges über die ⟨von mir⟩ verwendete *Symbolik* sagen. Die Symbolik der *alten Algebra der Logik*, selbst diejenige von *Schröder*, ist für den gegenwärtigen Zweck *vollständig unbrauchbar*. Es empfiehlt sich indessen auch nicht, die Zeichengebung der *heutigen symbolischen Logik*, etwa diejenige von *Whitehead* und *Russell*, | einfach zu 9
übernehmen, da diese *wohl dem weiteren Zweck* der symbolischen Logik, aber *nicht so sehr dem engeren der Algebra der Logik*, wie ich sie verstehe, angepaßt ist. Daher habe ich mich zwar vorwiegend an die Symbolik von Whitehead und Russell angeschlossen, aber diese bis zu einem gewissen Grade nach meinen besonderen Zwecken umgestellt.

Die *Negation* einer Aussage bezeichne ich, wie gesagt, durch Überstreichen: $\overline{p}$, die *Disjunktion* als $p\,q$. Dann stellt sich „*p und q*" als $\overline{\overline{p}\,\overline{q}}$ und „*Wenn p, so q*" als $\overline{p}\,q$ dar. Der Bequemlichkeit halber führe ich für „*p* und *q*" noch die kürzere Schreibung $p.q$ ein. Daß ein *Ding* (Individuum) *a unter einen Begriff* f^x *fällt*, schreibe ich so: f_a. Ist die *unbestimmte Aussage* f_x *für jedes Ding* x *richtig*, so schreibe ich, um dies anzudeuten: $\underline{x\,f_x}$. Daß *mindestens ein Ding* die Aussage f_x erfüllt, läßt sich dann als $\overline{\underline{x\,\overline{f_x}}}$ ausdrücken. Ich schreibe dafür überdies, die übereinanderstehenden Teile der beiden Striche gewissermaßen gegeneinander weghebend: $\overline{x}\,f_x$.

Klammern benutze ich im wesentlichen nur, um die Verknüpfungen der Disjunktion und der Konjunktion voneinander zu trennen (falls die letzte durch den Punkt bezeichnet wird), sonst nur *zur Hervorhebung*.

So z.B. $x\,f_x g_x$, $x\,f_x p$. Das letzte ist ⟨⟨an sich⟩⟩ *zweideutig!* Es gilt aber $(xf_x)p \leftrightarrow x(f_xp)$ Regel II*. Entsprechend schreibe ich $x.f_x.g_x \quad \overline{x}.f_x.p$, wo der erste Punkt nur Lesezeichen ist.

Unter einen Begriff können nun *selbst wieder Begriffe* fallen. Ist F^ϕ ein *Begriff zweiter Stufe*, so schreibe ich F_ϕ für die Aussage, daß der Begriff ϕ unter den Begriff F fällt. Die Bedeutungen von ϕF_ϕ und $\overline{\phi} F_\phi$ sind hiernach ohne weiteres klar.

Ich komme nun zur *Erklärung der Rechenregeln*, die | darüber Aus- 10
kunft geben, welche Operationen man mit den hingeschriebenen Zeichen vornehmen darf. Solche Regeln sind *auch in der axiomatisch betriebenen symbolischen Logik* bekanntlich unentbehrlich. Während man aber dort ihre Zahl und den Gehalt jeder einzelnen auf ein Minimum zu beschränken sucht, verfolgen wir hier *das gegenteilige Ziel*, nicht: ihre Zahl beliebig zu vermehren — das würde das Gedächtnis unnötig belasten —, wohl aber, jeder einzelnen als auch dem Regelsystem insgesamt eine *möglichst große praktische Tragweite* zu geben. Im Gegensatz zu[r] axiomatischen Untersuchung sind hier also *durchaus praktische Rücksichten* maßgebend.

I. Satz von der doppelten Verneinung. $\overline{\overline{p\,\overline{q}}}\,r \leftrightarrow (p\,\overline{q})r$

II, II*. Vereinigungssatz. $(p\,\overline{q})r \leftrightarrow p(\overline{q}\,r) \leftrightarrow p\,\overline{q}\,r, \quad (xf_x)p \leftrightarrow x(f_xp)$

III, III*. Vertauschungssatz.

$$\overline{p\,q}\,r\,\overline{s} \leftrightarrow \overline{s}\,\overline{q\,p}\,r \qquad x\overline{y}f_xg_y \leftrightarrow xf_x\overline{y}g_y$$
$$xy\,f_{xy} \leftrightarrow yx\,f_{xy}, \qquad \overline{x}\,\overline{y}f_{xy} \leftrightarrow \overline{y}\,\overline{x}f_{xy}$$

IV, IV*. Verschmelzungssatz.

$$p\,p\,q \leftrightarrow p\,q, \qquad \begin{cases} x\,f_x.x\,g_x \leftrightarrow x.f_x.gx \\ xf_x\,xg_x \leftrightarrow xf_xg_x \end{cases}$$

V, V*. Eliminationssatz. $[p\,\overline{\overline{q}\,r}.\overline{q}\,r\,\overline{p\,s} \rightarrow p\,\overline{p\,s}]$

V, V*. Implikationssatz.

VI, VI*. Satz von der Ausführung der Negation.

$$\begin{cases} \overline{p\,q} \leftrightarrow \overline{p}.\overline{q}, \\ \overline{xf_x} \leftrightarrow \overline{x}\overline{f_x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{p.q} \leftrightarrow \overline{p}\,\overline{q} \\ \overline{\overline{x}f_x} \leftrightarrow x\overline{f_x} \end{cases}$$

VII. Distributionssatz. $p\,q.r \leftrightarrow (p.r)(q.r), \quad (p.q)r \leftrightarrow p\,r.q\,r$

VIII. Dualitätssatz.

IX. Vereinfachungssätze.

X. Verdrängungssatz.

XI. Satz von der Umschreibung der singulären Aussage.

11 $f_a \leftrightarrow x\,\overline{x = a}f_x \leftrightarrow \overline{x}.x = a.f_x$ |

Diese wenigen Andeutungen mögen genügen.

Bezüglich unseres allgemeinen Zieles erinnere ich daran, daß für einen gewissen ganz einfachen Bereich von Aussagen, nämlich alle diejenigen, die *nur die Worte nicht und oder* (überdies, wenn man will, *und, folgt, äquivalent*) voraussetzen, die *Lösung des Entscheidungsproblems* bereits seit einiger Zeit *bekannt* ist.[7] Sogar *zwei* Lösungen.

Ist z.B. die Aussage $p \supset\colon p \supset q \;.\!\supset\!.\; q$ vorgelegt, die ich so schreibe: $\overline{p}\,\overline{\overline{p}\,q}\,q$, so braucht man hier für p und q nur die Werte ⟦„richtig"⟧ ⟪„*wahr*"⟫ ($\curlyvee$) und „falsch" ($\curlywedge$) auf die *vier mögliche⟪n⟫ Arten* einzusetzen, wobei

$$\overline{\curlyvee} \leftrightarrow \curlywedge, \qquad \overline{\curlywedge} \leftrightarrow \curlyvee, \qquad [\curlyvee\curlyvee \leftrightarrow \curlyvee\curlywedge \leftrightarrow \curlywedge\curlyvee \leftrightarrow \curlyvee], \qquad \curlywedge\curlywedge \leftrightarrow \curlywedge$$

und erhält jedesmal den Wahrheitswert $\curlyvee$, womit die Richtigkeit, genauer: die *Allgemeingültigkeit* der gegebenen Aussage bestätigt ist.

Eleganter ist das *Verfahren der Normalform.* Vermöge des Distributionssatzes u.s.f. kann man jede Aussage der betrachteten Art als *Konjunktion von lauter Disjunktionen von Bestandteilen p,* $\overline{p}$ schreiben.

$$\overline{p}(p.\overline{q})q \leftrightarrow \overline{p}\,p\,q.p\,\overline{q}\,q$$

Hier enthält das erste Glied den Bestandteil $\overline{p}\,p \leftrightarrow \curlyvee$ und das zweite den Bestandteil $\overline{q}\,q \leftrightarrow \curlyvee$. Diese Bedingung ist andererseits *auch hinreichend*, sodaß man jede derartige Aussage auf diese Weise prüfen kann.

---

[7] Ed.: The connective words in this sentence are individually underlined in black ink.

Ich hatte anfänglich versucht, das *erste Verfahren auf höhere Aussagen zu übertragen.* Man kann nämlich auf Grund unserer Regeln *alle Operatoren nach vorn* bringen, sodaß rechts eine Verknüpfungsaussage allein aus *nicht, oder, und* übrigbleibt. Z.B.

$$\overline{xy\overline{f_{xy}}g_y.\overline{z}\overline{h_{yz}}} \;\leftrightarrow\; x\overline{y}z\overline{\overline{f_{xy}}g_y.\overline{h_{yz}}} \;\leftrightarrow\; x\overline{y}z\,\text{(Normalform)}$$

| Dies führt jedoch, soviel ich sehe, *nicht zum Ziel.* Daher wird man ver- 12
suchen, das *Verfahren der Normalform* zu verallgemeinern.

Zunächst möchte ich den *Bereich von Aussagen* genauer umgrenzen, für den ich das Entscheidungsproblem durchgeführt habe. Was diejenigen Aussagen betrifft, die überhaupt für unser Problem in Frage kommen, so werden wir sagen, daß *außerlogische konstante Bestandteile*, wie a, f^x, f^{xy} gewiß *nicht* vorkommen werden. Nur *veränderliche*, d.h. gleichzeitig durch Operatoren vertretene:

$$x, \quad \phi^x, \quad \phi^{xy}, \quad \Phi^{\phi}, \text{ u.s.f., außerdem aber } x = y.$$

Wir beschränken uns zunächst auf: x, ϕ^x, lassen also nur die folgenden Worte zu: *nicht, oder, alle, Ding,* ⟦*Begriff*⟧ ⟪*Eigenschaft*⟫ (von Dingen), *erfüllt.* Natürlich muß jedes Dingsymbol und jedes Begriffssymbol irgendwo zu Anfang oder innerhalb der Aussage *zugleich als Operator* x, $\overline{x}$, ϕ, $\overline{\phi}$ vorkommen. ⟪Auch von $x = y$ sehen wir vorläufig ab.⟫ *Teilbereich der Aussagen zweiter Ordnung* nach Russell.

Wir betrachten das triviale Beispiel: $\phi\overline{\chi}x\overline{\phi_x}\,\overline{\chi_x}$, etwa zu lesen: „Zu jedem Begriff ϕ gibt es einen Begriff χ, sodaß, was unter ϕ fällt, nicht unter χ fällt." Oder:

$$\phi\chi\psi\;\overline{x\,\overline{\phi_x}\chi_x}\;\overline{x\,\overline{\chi_x}\psi_x}\;x\,\overline{\phi_x}\psi_x$$

Barbara. *Besonderer Fall.* Die Begriffsoperatoren sind sämtlich allgemein und am Anfang der Aussage. Sie können auch irgendwie innerhalb der Aussage verstreut sein ⟪und partikulär!⟫ Diesen Aussagenbereich nenne ich den den *Bereich B.*

Allgemeines Programm. Die geg. Aussage ist nach einer gewissen Vorschrift in eine solche umzuschreiben, die *einen Begriff weniger* enthält. Dies wird so lange fortgesetzt bis *alle Begriffe ϕ, χ, ... verschwunden sind* und eine ganz triviale Aussage übrig bleibt, für welche die Entscheidung ohne weiteres vollzogen werden kann. | 13

Eliminationsverfahren. (Aussonderung ?) *Formulierung.* Ich nehme den *am weitesten rechts stehenden Begriffsoperator und den zugehörigen Operand:*

$$\phi F_{\phi\chi uv} \qquad \text{oder} \qquad \overline{\phi}F_{\phi\chi uv}.$$

χ hat den Operator weiter links, ebenso u und v, außerdem können aber Operatoren x, $\overline{y}$ innerhalb F auftreten. Diese ließen sich aber oben nicht mit aufführen. Dagegen enthält F nach Voraussetzung *keine Begriffsoperatoren.*

Wir sehen nun auch noch von den Operatoren ϕ bez. $\overline{\phi}$ ab und beschränken uns *allein auf den Operand* $F_{\phi\chi\ldots uv\ldots}$, um diesen weiter umzuformen.

Wesentlicher Gedanke: Bei der Betrachtung von F braucht man sich um die *außerhalb* stehenden Operatoren *nicht* zu kümmern. ϕ, χ sind daher als *konstante Begriffe*, u, v als *konstante Dinge* zu behandeln.

Wir haben also die Aufgabe vor uns, den *Begriff* ϕ *zu eliminieren* aus einer Aussage $\overline{\phi}\,Q$. (Es genügt, uns auf diesen Fall zu beschränken, da der andere durch Verneinung entsteht.) Hier ist nun Q eine Aussage, die möglicherweise *konstante und veränderliche Dinge*, aber keine anderen als *konstante Begriffe*, d.h. eben keine Begriffsoperatoren, enthält. Alle derartigen Aussagen fasse ich zusammen zu dem *Aussagenbereich A.* Teilbereich der *Aussagen erster Ordnung.*

Und diese Aussagen des Bereiches A haben nun die angenehme Eigenschaft, daß sie sich *tatsächlich als Normalformen* schreiben lassen. Die Frage ist nun: Aus welchen *Bausteinen* werden sich diese Normalformen zusammensetzen. (Früher: p, $\overline{p}$) Es sind zunächst, wenn ich die Konstanten ⟦wieder durch lateinische Buchstaben⟧ ⟨⟨als solche⟩⟩ bezeichne, solche von der Form f_a, weiterhin:

$$\begin{cases} xf_x, \quad x\,f_x g_x, \quad x\,f_x g_x h_x, \ldots \\ \overline{x}.f_x, \quad \overline{x}.f_x.g_x, \quad \overline{x}.f_x.g_x.h_x, \ldots \end{cases}$$

14 | (Die f, g, h können auch *zum Teil verneint* sein.) Andere Formen kommen nicht vor. In der Tat ist z.B. nach IV*:

$$\overline{x}f_x g_x \quad \leftrightarrow \quad \overline{x}f_x\overline{x}g_x$$

Für die obigen Bausteine führe ich eine *abgekürzte Schreibung* ein:
Neue Klassensymbolik. α, $\dot{\alpha}$, $\vee$, $\wedge$, α_a.
Bausteine

$$\begin{cases} \underbrace{\alpha} \quad \underbrace{\alpha\beta} \quad \underbrace{\alpha\beta\gamma} \quad \ldots \\ \overbrace{\alpha} \quad \overbrace{\alpha\beta} \quad \overbrace{\alpha\beta\gamma} \quad \ldots \end{cases}$$

Bedeutungen: Beispiel:

$$\begin{aligned} x\overline{y}.f_x g_y.h_x k_y &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (xf_x)(\overline{y}g_y).(xf_x h_x)(\overline{y}.g_y.k_y).(xh_x)(yk_y) \\ &\qquad \text{durch zwangsläufige Umformung} \\ &\leftrightarrow \underbrace{\alpha}\,\overbrace{\beta}.\underbrace{\alpha\gamma}\,\overbrace{\beta\delta}.\underbrace{\gamma}\,\overbrace{\delta}. \end{aligned}$$

Unser Problem lautet nunmehr $\overline{\rho}\,F_{\rho\alpha\beta\ldots ab\ldots}$. Wir haben also *links einen Operator* $\overline{\rho}$ und rechts davon einen Ausdruck, nehmen wir an, eine *disjunktive Normalform*, d.h. eine Disjunktion aus lauter Konjunktionen der obigen Bestandteile. Da wir nach IV* $\overline{\rho}$ *zu jedem einzelnen Disjunktionsglied* setzen können, haben wir also nur noch Bestandteile $\overline{\rho}\,\mathfrak{S}$ zu betrachten, wo $\mathfrak{S}$ eine *Konjunktion von Bausteinen* ist. Und zwar genügt es hier im besonderen, die Form

$$\overline{\rho}.\underbrace{\alpha\rho}.\underbrace{\beta\dot{\rho}}\,.\,\overbrace{\gamma\rho}\,.\,\overbrace{\gamma'\rho}\dots\overbrace{\delta\dot{\rho}}.\overbrace{\delta'\dot{\rho}}\dots$$

zu betrachten, wie in der Hauptsache bereits der *alten Algebra der Logik* bekannt war. Freilich war diese nicht von dem Bereich A, sondern von dem sehr viel engeren Bereich der ⟦durch ihre Symbolik, d.h.⟧ der *durch bloße Klassenverknüpfungen* herstellbaren Aussagen ausgegangen, wie sie gar nicht anders konnte, da ihre Symbolik die Darstellung der Aussagen unseres Bereiches A (mit beliebig durcheinander gewürfelten Individuenoperatoren) überhaupt nicht zuließ. Des obige Problem hat *Schröder zu lösen vesucht*; es ist ihm aber trotz aller | Mühe *nicht gelungen*. Er ist 15
über gewisse spezielle Ergebnisse nicht hinausgekommen. Der Grund liegt nach meiner Ansicht durchaus in der *Sprödigkeit seiner Symbolik.*

Ein *besonders einfacher Fall* des obigen Problems ist der folgende:

$$\overline{\rho}\,.\,\underbrace{\alpha\rho}\,.\,\underbrace{\beta\dot{\rho}} \leftrightarrow \underbrace{\dot{\alpha}\beta}$$

Oder bei anderer Wahl der Größen:

$$\overline{\rho}\,.\,\underbrace{\dot{\alpha}\rho}\,.\,\underbrace{\dot{\rho}\beta} \leftrightarrow \underbrace{\dot{\alpha}\beta}$$

Dies ist nichts anderes als der bekannte Schluß *Barbara.* $\underbrace{\dot{\alpha}\rho}$ heißt nämlich, daß α eine Teilklasse von ρ ist. Gibt es zu α und β eine „Zwischenklasse“ ρ, so ist gewiß auch α eine Teilklasse von β. Aber auch das Umgekehrte gilt. Ist α eine Teilklasse von β, so läßt sich gewiß auch eine Zwischenklasse angeben. Denn es ist ja $\alpha \subset \alpha \subset \beta$ und $\alpha \subset \beta \subset \beta$.

Dies ist das *grundlegende Eliminationsergebnis*, auf das alle Eliminationen letztlich zurückgeführt werden. Tatsächlich kommt die Klasse ρ bez. der Begriff ϕ *rechts nicht mehr vor.*

Von hier aus gelingt es nun durch einen *einfachen Gedanken* das obige allgemeine Problem Schröders *rein rechnerisch zu erledigen*, allerdings durch einen Gedanken, den Schröder selbst unmöglich haben konnte, weil er ganz wesentlich auf der Verwendung der ⟪*modernen*⟫ *verbesserten Symbolik* beruht. Es gilt nämlich, (als Sonderfall von III*) die logische Regel:

$$\overline{x}\,\overline{y}\,f_{xy} \leftrightarrow \overline{y}\,\overline{x}\,f_{xy}.$$

Ebenso, wenn Begriffsoperatoren vorkommen:

$$\overline{\phi}\,\overline{x}\,F_{\phi x} \leftrightarrow \overline{x}\,\overline{\phi}\,F_{\phi x}.$$

Nun stecken aber in den γ- und den δ-Gliedern *partikuläre Operatoren* $\overline{x}$, $\overline{y}$, und diese kann man vermöge III* über den Klassenoperator $\overline{\rho}$ *nach links hinausschieben*, sodaß wir die rechts verbleibenden Individuen x, y

16 einfach als *konstant* anzusehen haben, da wir ja nun den Ausdruck von | $\overline{\rho}$ an betrachten werden. Vermöge XI läßt sich der neue Operand von $\overline{\rho}$ *ganz aus allgemeinen Aussagen* zusammensetzen und überdies wieder die Anzahl der α- und der β-Glieder *je auf Eins* zurückführen, so daß die Elimination nach der vorhin angegebenen Regel ohne weiteres vollzogen werden kann. Das *Ergebnis* ist folgendes:

$$\alpha\beta\,.\big[\overparen{\gamma\beta}\,.\,\overparen{\gamma'\beta}\ldots \mid\ .\,\overparen{\delta\alpha}\,.\,\overparen{\delta'\alpha}\ldots\big] \quad \textit{Rohe Resultante!}$$

Es besage: $\alpha \cup \beta = \vee$, $\overparen{\gamma\beta}$, $\overparen{\gamma'\beta}$, u.s.w. $\overparen{\delta\alpha}$, $\overparen{\delta'\alpha}$, u.s.w. Die Klammern und der Strich sollen die *Zusatzbedingung* zum Ausdruck bringen, daß die Elemente, die γ, γ', $\ldots$ mit β einerseits und δ, δ', $\ldots$ mit α andererseits gemeinsam haben, *durchweg verschieden wählbar* sein sollen. In Begriffsschrift:

$$x\alpha_x\beta_x\,.\,\overline{u}\overline{u'}_{--}\ \overline{v}\overline{v'}_{--}\,.\,(uu'_{--}\ \mid\ vv'_{--}\ )\,.\,\gamma_u\,.\,\beta_u\,.\,\gamma'_{u'}\,.\,\beta_{u'}\ldots\delta_v\,.\,\alpha_v\,.\,\delta'_{v'}\,.\,\alpha_{v'}\ldots$$

wo $(uu'_{--}\ \mid\ vv'_{--}\ )$ nur besagen soll, daß jedes u von jedem v verschieden ist.

Damit ist die *erste Begriffselimination nunmehr geleistet.* Wollen wir das Eliminationsgeschäft *fortsetzen*, so hat die Sache allerdings einen *Haken.* Denn die gewonnene Resultante gehört ja ihrerseits *dem Bereich A im allgemeinen nicht mehr an*, da sie ja noch die *Beziehung der Identität* enthält, läßt sich somit auch nicht als Verknüpfungsaussage aus den vorhin aufgezählten Bausteinen und daher auch nicht als Normalform aus solchen schreiben.[8]

Es empfiehlt sich nun, um die dem Problem angemessene Allgemeinheit zu erreichen, die *Identität* von vornherein *mit unter die Bestandteile der Aussagen von A* aufzunehmen. Den so erweiterten Bereich nenne ich den *Bereich* A^*.

Dies Problem erschien mir *anfangs hoffnungslos verwickelt.* Nach man-
17 chem Herumprobieren gelang es mir indessen, die | Aussagen von A^* als *Normalformen* darstellbar zu erweisen aus den *früheren Bestandteilen* und solchen von den Formen:

$$\begin{array}{ccccccc} \underparen{\underparen{\alpha}} & \underparen{\underparen{\alpha\beta}} & \underparen{\underparen{\alpha\beta\gamma}} & \ldots & \underparen{\underparen{\underparen{\alpha}}} & \underparen{\underparen{\underparen{\alpha\beta}}} & \ldots \\ \overparen{\overparen{\alpha}} & \overparen{\overparen{\alpha\beta}} & \overparen{\overparen{\alpha\beta\gamma}} & \ldots & \overparen{\overparen{\overparen{\alpha}}} & \overparen{\overparen{\overparen{\alpha\beta}}} & \ldots \end{array}$$

Hier bedeutet $\overparen{\overparen{\alpha}}$, daß α mindestens 2 Individuen enthält $\longrightarrow$. Z.B. $\underparen{\underparen{\dot{\alpha}\beta}}$, daß α alle Elemente von β mit höchstens einer Ausnahme enthält.

Die *Elimination* aus einem solchen Ausdruck geht nun *bemerkenswerterweise genauso glatt* vonstatten wie im Falle des Bereichs A, sodaß wir

[8]Ed: The left margin contains the text „*Problem der Klausel!*" with an arrow pointing to the beginning of this paragraph.

nunmehr aus einer Aussage des *erweiterten Bereichs* B^* tatsächlich alle Begriffsoperatoren der Reihe nach eliminieren können. Was nach allen Zurückführungen *schließlich übrig* bleibt, kann z.B. ein Ausdruck wie $\underset{\smile}{\vee}$ sein, der die gegebene Aussage als *unbedingt*, d.h. in jedem Individuenbereich *gültig* erweist — solche werden uns natürlich vor allem interessieren, oder aber etwa $\overset{\frown}{\wedge}$ was eine *unbedingt falsche* Aussage bedeutet. Im allgemeinen Fall wird dagegen ein *Ausdruck nach Art des folgenden* herausspringen, (den ich absichlich möglichst verzwickt aufgebaut habe):

$$\overset{\substack{\frown\\\frown\\\frown\\\frown\\\frown}}{\vee}\,(\overset{\substack{\frown\\\frown}}{\vee}\,.\,\underset{\substack{\smile\\\smile\\\smile\\\smile}}{\wedge})(\overset{\substack{\frown\\\frown\\\frown}}{\vee}\,.\,\underset{\substack{\smile\\\smile}}{\wedge})\,\underset{\smile}{\wedge}$$

Dies ist eine *disjunktive Normalform.*

Bedeutung der Glieder!

Die gegebenen Aussage ist im allgemeinen richtig, aber falsch, wenn es genau 1 Individuum oder wenn es genau 4 Individuen gibt.

⟪*Bedeutung z.B. für die Geometrie!*⟫[9]

DEPARTMENT OF PHILOSOPHY
314 MOSES HALL #2390
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
BERKELEY, CA 94720–2390, USA
E-mail: mancosu@socrates.berkeley.edu
URL: http://philosophy.berkeley.edu/mancosu/

DEPARTMENT OF PHILOSOPHY
UNIVERSITY OF CALGARY
2500 UNIVERSITY DRIVE N.W.
CALGARY, AB T2N 1N4, CANADA
E-mail: rzach@ucalgary.ca
URL: http://richardzach.org/

[9]Ed: A paragraph in shorthand omitted.