

JEAN-MICHEL FOURNEAU

DOMINIQUE VERCHÈRE

G-Réseaux dans un environnement aléatoire

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 34, n° 4 (2000),
p. 427-448

http://www.numdam.org/item?id=RO_2000__34_4_427_0

© AFCET, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

G-RÉSEAUX DANS UN ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE (*)

par Jean-Michel FOURNEAU ⁽¹⁾ et Dominique VERCHÈRE ⁽²⁾

Communiqué par Catherine ROUCAIROL

Résumé. – *Nous étudions des réseaux de clients positifs et négatifs dans lesquels les paramètres tels que les taux d'arrivée, les probabilités de routage, les taux de service et les effets des signaux dépendent de l'état d'une chaîne de Markov modulante. Ces modèles introduisent une nouvelle généralisation des réseaux de file d'attente, et en particulier dans la classe des G-réseaux, définis par [4]. Nous montrons que dans certaines conditions la distribution à l'état stationnaire du nombre de clients dans les files est à forme produit. Ces résultats sont obtenus comme corollaire d'une propriété très simple sur les chaînes de Markov à n dimensions comportant une modulation. Malgré sa simplicité, cette propriété semblait jusqu'alors ignorée.*

Mots clés : Files d'attente, forme produit, environnement aléatoire, réseaux généralisés.

Abstract. – *We study networks with positive and negative customers (or Generalized networks of queues and signals) in a random environment. This environment may change the arrival rates, the routing probabilities, the service rates and also the effect of signals. We prove that the steady-state distribution has a product form. This property is obtained as a corollary of a much more general result on multidimensional Markov chains.*

Keywords: *Queues, product form, random environment, generalized network.*

1. INTRODUCTION

Lorsque l'on doit modéliser le comportement de systèmes dynamiques à l'aide de réseaux de files d'attente, on s'aperçoit que les différents paramètres du modèles doivent souvent être des fonctions de l'environnement. Par exemple, les taux d'arrivée dans le réseau varient au cours du temps, la durée de service d'un client dans une file dépend de sa date d'arrivée, le routage des clients entre les files est modifié. Ceci est particulièrement important dans le cas des réseaux ATM où la sporadicité des arrivées est

(*) Reçu en juillet 1996.

⁽¹⁾ PRISM, Université de Versailles Saint-Quentin, 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles Cedex, France.

⁽²⁾ Alcatel, Corporate Research Center, Marcoussis, France.

un phénomène crucial, mais aussi dans le cas de systèmes distribués où l'on cherche à équilibrer la charge sur les différentes composantes.

Contrairement aux réseaux, les files d'attente isolées dans un environnement aléatoire ont fait l'objet de nombreux travaux. Dans ces modèles, on étudie l'influence d'un processus stochastique Markovien sur l'évolution des variables aléatoires qui caractérisent le système. Ces variables aléatoires peuvent être le nombre de clients dans la file, le temps d'attente, le taux d'utilisation, ... Ce processus environnement, appelé aussi « processus des phases », permet de prendre en compte l'influence de l'environnement dans les paramètres du modèle. Une très bonne synthèse sur les files d'attente simples modulées par une chaîne de Markov est présentée dans [23]. Dans ces modèles, les taux de service et les taux d'arrivée sont des paramètres de la chaîne dite « principale ». Ces paramètres sont modulés par les changements de phase d'un processus de Markov dit « secondaire » qui modélise l'environnement. Les changements de phase de la chaîne de Markov secondaire peuvent être dûs à une variable externe ou interne de la chaîne de Markov principale.

Peu de résultats analytiques ont été démontrés pour les réseaux de files d'attente dans un environnement aléatoire. L'approche « matrice géométrique » de Neuts [22] ne permet pas d'analyser des réseaux de files infinies et de nombreux problèmes numériques ne sont pas actuellement résolus.

Récemment, dans [27] la distribution stationnaire d'un réseau markovien dans un environnement modulé a été obtenue en utilisant les propriétés de la chaîne inverse [19]. Zhu démontre ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que cette distribution du nombre de clients dans les files du réseau soit à forme produit.

L'objet de cet article est, initialement, de présenter une condition de solution à forme produit pour des réseaux généralisés dans un environnement aléatoire. Mais l'approche nous a conduit à démontrer un résultat beaucoup plus général sur des chaînes de Markov à n dimensions et comprenant une phase. Les résultats sur les réseaux généralisés sont alors vus comme de simples corollaires de ce résultat général, ce qui permet de simplifier considérablement les preuves.

Les réseaux généralisés (ou G-réseaux) ont été introduits par Gelenbe [4, 5, 11]. Dans ces réseaux, on considère deux natures de clients : les clients positifs et les clients négatifs. Et on ajoute un nouveau concept : la suppression d'un client positif par un client négatif. Un client positif

est un client usuel des réseaux de files d'attente [1, 17] (voir [21] ou [9] pour une présentation des principaux résultats sur les réseaux usuels de file d'attente). Lorsqu'un client positif est servi, il est routé dans une file en tant que client positif ou en tant que client négatif. Un client négatif arrivant dans une file non vide détruit un client positif (la taille de la file est réduite d'une unité) et disparaît instantanément. Si la file est vide, le client négatif n'a aucun effet et il est supprimé. Un client négatif ne reçoit pas de service. Les G-réseaux incluent donc toutes les transitions de clients des réseaux de Jackson. De plus, la transition correspondant au départ synchronisé vers l'extérieur de deux clients issus de deux files distinctes est modélisée par les trois événements simultanés suivants : fin de service, routage vers une autre file en tant que client négatif et destruction d'un client positif par un client négatif. Plusieurs extensions de G-réseaux ont alors été développées : nous ne citerons ici que ceux qui ont un intérêt pour cet article (pour une bibliographie plus exhaustive sur ce sujet, consulter [2]) :

- une solution à forme produit pour les G-réseaux monoclasses avec destruction multiple est démontrée dans [6]. Dans ce G-réseau, la synchronisation entre deux files est plus forte car cette transition correspond au départ simultané d'un groupe de clients issus de deux files distinctes. Un résultat du même type a été obtenu par Henderson [12]. Le cas de la remise à zéro de la file (qui correspond à une capacité de destruction non bornée) a été démontré en multiclasse par Fourneau *et al.* [18].
- Dans [7], Gelenbe démontre une solution à forme produit pour des G-réseaux monoclasses dont les clients négatifs provoquent des mouvements de clients positifs. La synchronisation est alors étendue à trois files. En effet, cette transition correspond à une fin de service dans une première file, un routage vers une deuxième file en tant que client négatif et un déplacement d'un client positif de cette deuxième file vers une troisième file.

Initialement les G-réseaux ont été développés pour modéliser le comportement des réseaux de neurones. Chaque file d'un G-réseau modélise un neurone. Les clients positifs circulant entre les files représentent les signaux excitatoires échangés entre les neurones. Les clients négatifs provenant de l'extérieur ou depuis une file du G-réseau représentent les signaux inhibiteurs qui diminuent le potentiel d'un neurone (voir [2] pour une bibliographie à ce sujet). Les réseaux généralisés ont été également employés pour modéliser des destructions de paquets [14], les problèmes d'équilibrage de charge [2]. Dans [13], des mesures de performances sont calculées sur des

G-réseaux qui modélisent des ateliers de fabrication où peuvent être produit des pièces défectueuses, ainsi que des systèmes informatiques soumis à des pannes supprimant instantanément tous les clients d'une file.

Le but de cette étude est de démontrer une condition suffisante de solution à forme produit pour des G-réseaux dans un environnement aléatoire. La principale difficulté vient du fait que la réversibilité ne s'applique pas à la chaîne de Markov associée aux nombres de clients dans un G-réseau. Nous nous ramenons alors à une chaîne de Markov à 2 composantes dont une phase. Et nous montrons une condition suffisante pour que la solution stationnaire de cette chaîne soit le produit de la solution de la chaîne modulante par la solution de la chaîne modulée. Ce résultat, quoique très simple, ne semble pas avoir été déjà énoncé. Il permet ensuite d'obtenir comme simple corollaire les résultats sur les réseaux généralisés que nous cherchions à obtenir, et ceci sans passer comme nous l'avions fait dans certains cas par la résolution des équations d'équilibre global. Ce résultat sur les chaînes nous permet aussi de redémontrer les résultats de Zhu qui avaient initié notre étude. Enfin, puisqu'il s'applique sur des chaînes de Markov, ce résultat n'est pas limité aux réseaux de files d'attente et peut être utilisés dans tout formalisme de modélisation permettant de construire des chaînes : réseaux de Petri stochastiques, réseaux d'automates stochastiques, algèbre de processus.

Le plan du papier est donc le suivant. On présente au chapitre 2 le résultat sur les chaînes de Markov. Puis les chapitres 3 et 4 sont consacrés à deux types de réseaux généralisés. Dans le premier G-réseau, les taux de services sont dépendants de l'état du G-réseau et de l'environnement. Dans le second, les transitions de synchronisation sont modulées et sont associées à un groupe de clients de taille finie. Nous donnons les conditions de stabilité de la chaîne de Markov associée à ces deux G-réseaux dans un environnement markovien. Enfin le chapitre 4 est consacré à un exemple d'utilisation d'un tel résultat pour estimer des taux de perte dans un réseau à haut débit avec mécanisme d'accès sélectif. En guise de conclusions, on suggère également plusieurs autres applications possibles de ces résultats.

2. CHAÎNE MODULÉE

On considère une chaîne de Markov $(\vec{n}; u)$ en temps continu à deux composantes : u représente la phase alors que \vec{n} est un vecteur dont les taux de transitions dépendent de la phase. Par contre les transitions de la phase

ne dépendent pas de l'état de la composante \vec{n} . On suppose que la variable u est à support fini. On a deux type de transition :

- les transition modifiant l'état de la phase, leurs taux définissent un générateur $q = (q_{uv})$;
- pour chaque phase u , les taux de transition modifiant l'état de la chaîne principale. Ces taux définissent une matrice de dimension infinie : $\mathcal{Q}(u) = (\mathcal{Q}_{\vec{n}, \vec{n}'}(u))$.

On peut alors écrire l'équation de Chapman-Kolmogorov pour l'état d'équilibre du système en supposant que celui-ci existe.

$$\begin{aligned} p(\vec{n}; u) \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} \mathcal{Q}_{\vec{n}, \vec{n}'}(u) + p(\vec{n}; u) \sum_{v \neq u} q_{uv} \\ = \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} p(\vec{n}'; u) \mathcal{Q}_{\vec{n}', \vec{n}}(u) + \sum_{v \neq u} p(\vec{n}; v) q_{vu}. \end{aligned} \quad (1)$$

THÉORÈME 1 : Soit $\pi(u)$ la mesure invariante de la chaîne secondaire (i.e. : la phase) :

$$\pi(u) \sum_{v \neq u} q_{uv} = \sum_{v \neq u} \pi(v) q_{vu}. \quad (2)$$

Et soit $\mathbf{p}(u)$ le vecteur propre dominant de la matrice $\mathcal{Q}(u)$.

Si tous les vecteurs propres dominants $\mathbf{p}(u)$ sont égaux (et donc indépendants de u), alors la mesure invariante de la chaîne $(\vec{n}; u)$ est à forme produit

$$p(\vec{n}; u) = p(\vec{n})\pi(u). \quad (3)$$

Preuve : La preuve consiste en des manipulations algébriques de l'équation de Chapman Kolmogorov que nous venons d'écrire. En séparant les taux de transition, l'équation (1) devient :

$$\begin{aligned} p(\vec{n}; u) \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} \mathcal{Q}_{\vec{n}, \vec{n}'}(u) - \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} p(\vec{n}'; u) \mathcal{Q}_{\vec{n}', \vec{n}}(u) \\ = - \left(p(\vec{n}; u) \sum_{v \neq u} q_{uv} - \sum_{v \neq u} p(\vec{n}; v) q_{vu} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

En introduisant la solution à forme produit dans l'équation (4), pour tout $u \in \mathcal{U}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi(u) & \left(p(\vec{n}) \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} \mathcal{Q}_{\vec{n}, \vec{n}'}(u) - \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} p(\vec{n}'; u) \mathcal{Q}_{\vec{n}', \vec{n}}(u) \right) \\ & = -p(\vec{n}) \left(\pi(u) \sum_{v \neq u} q_{uv} - \sum_{v \neq u} \pi(v) q_{vu} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Mais puisque $\pi(u)$ est la mesure invariante de la chaîne secondaire, le membre de droite de l'équation (5) est nul. Donc pour toute phase u :

$$p(\vec{n}) \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} \mathcal{Q}_{\vec{n}, \vec{n}'}(u) = \sum_{\vec{n}' \neq \vec{n}} p(\vec{n}') \mathcal{Q}_{\vec{n}', \vec{n}}(u). \quad (6)$$

Et puisque l'on a fait l'hypothèse que la solution $p(\vec{n})$ est indépendante de la phase u , on a bien prouvé que la solution à forme produit satisfait à l'équation d'équilibre.

On note $\mathbf{p} = (p(\vec{n}))$; $\vec{n} \in \mathcal{S}$ le vecteur solution. Matriciellement, l'équation (6) s'écrit :

$$\mathbf{p} \mathcal{Q}(u) = 0. \quad (7)$$

Ce résultat, simple, indique que si toutes les matrices $\mathcal{Q}(u)$ possèdent le même vecteur propre dominant \mathbf{p} , alors le système a une solution à forme produit. Cette condition peut sembler trop restrictive. En fait, malgré cette contrainte, le résultat peut se révéler intéressant. La première idée, que nous détaillerons lors de la conclusion, est de fournir une base pour une approximation si la contrainte n'est pas vérifiée. L'autre idée est que, justement, cette contrainte a un sens en modélisation de système soumis à un contrôle. Contrôler l'accès à un réseau, ou contrôler la charge dans un système distribué, c'est essayer de lisser des variations sporadiques en adaptant des paramètres pour garantir une charge constante. Cette idée est développée au chapitre 5 où on traite un exemple d'accès sélectif. Les résultats des chapitre 3 et 4 sont directement obtenus du corollaire suivant :

COROLLAIRE 1 : *Dans le cas où les composantes du vecteur \mathbf{p} sont également à forme produit i.e. $p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^N p_i(n_i)$ et où les probabilités marginales $p_i(n_i)$ suivent une loi géométrique de paramètre ρ_i alors l'hypothèse d'égalité*

des vecteurs propres dominants devient que le ratio ρ_i est indépendant de la phase u .

3. G-RÉSEAU MODULÉ AVEC DESTRUCTION SIMPLE

3.1. Modèle

Soit un G-réseau constitué de N files d'attente de capacité infinie. Les services sont exponentiels d'intensité dépendant de la phase. L'état du G-réseau à la date $t \in \mathbb{R}^+$ est représenté par le vecteur $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$ où $n_i(t)$ est le nombre de clients dans la file i . Posons $\mathbb{S} = \mathbb{N}^N$. Lorsque la chaîne de Markov secondaire est dans la phase $u(t) = u$, on a :

1. les arrivées extérieures sont réparties suivant un processus de Poisson dépendant de la phase u . Le taux d'arrivée extérieur des clients dans la file i est noté $\lambda_i^+(u)$ et le taux d'arrivée extérieur des signaux est noté $\lambda_i^-(u)$.
2. Si l'état du G-réseau est \vec{n} , le taux de service de la file i est dépendant de son état n_i et de la valeur de la phase. Le taux de service du client en cours, suit une loi exponentielle de moyenne $\mu_i(n_i, u)$ avec $\forall u \in \mathbb{B}, \mu_i(0, u) = 0$.
3. Lorsqu'un client a terminé son service dans la file i , il est routé vers la file j en tant que client avec la probabilité $P_{ij}^+(u)$ ou alors quitte le réseau avec la probabilité $d_i(u)$.
4. Lorsqu'un client a terminé son service dans la file i , il est routé vers la file j en tant que signal avec la probabilité $P_{ij}^-(u)$. Pour toute phase $u \in \mathbb{B}$ et toute file $i \in [1..N]$, on a :

$$\sum_{j=1}^N P_{ij}^+(u) + \sum_{j=1}^N P_{ij}^-(u) + d_i(u) = 1. \quad (8)$$

Pour ce modèle, on suppose que les matrices $P(u)$ ont leurs éléments diagonaux nuls donc : $P_{ii}^+(u) = P_{ii}^-(u) = 0$. L'hypothèse $P_{ii}^+(u) = 0$ n'a pas de conséquence sur la généralité du modèle. On pose $P_{ii}^-(u) = 0$ pour éviter les transitions du type : $\vec{n} + 2\vec{e}_i \rightarrow \vec{n}$ correspondant à une synchronisation multiple sur une file. Le cas de la destruction groupée, est traité dans la section 4.

5. Lorsqu'un signal arrive dans une file non vide i , il diminue la valeur n_i avec une probabilité dépendant de l'état de la file n_i et de la phase u

de la chaîne de Markov secondaire. Cette probabilité de destruction, notée $R_i(n_i, u)$, est proportionnelle à $\mu_i(n_i, u)$:

$$R_i(n_i, u) = \Theta_i(u)\mu_i(n_i, u). \tag{9}$$

Le coefficient de proportionnalité $\Theta_i(u)$ est dépendant uniquement de la phase u . Comme $R_i(n_i, u)$ est une probabilité, on a $\forall u \in \mathbb{B}$, $0 \leq \Theta_i(u)\mu_i(n_i, u) \leq 1$. Donc le taux de service de la file i est contraint pour tout état du réseau : $0 \leq \mu_i(n_i, u) \leq \frac{1}{\Theta_i(u)}$.

3.2. Solution à forme produit

Les hypothèses de la section 3 permettent d'affirmer que le processus stochastique $\{(\vec{n}(t), u(t)); t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu représentant l'état du système : réseau + environnement. Les taux de transition de cette chaîne sont :

Transitions $(\vec{n}(t), u(t)) \rightarrow (\vec{n}'(t), u'(t))$	Taux de transition $\tau[(\vec{n}(t), u(t)); (\vec{n}'(t), u'(t))]$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_N, v)$	q_{uv}
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_N, u)$	$\lambda_i^+(u)$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, n_j + 1, \dots, n_N, u)$	$\mu_i(n_i, u)P_{ij}^+(u)$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, n_j - 1, \dots, n_N, u)$	$\mu_i(n_i, u)P_{ij}^-(u)R_j(n_j, u)$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_N, u)$	$\mu_i(n_i, u)d_i(u)$ $+ \mu_i(n_i, u)P_{ij}^-(u)(1 - R_j(n_j, u))$ $+ \lambda_i^-(u)R_i(n_i, u)$

Notons que le taux associé à la transition $(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_N, u)$, regroupe plusieurs événements. Lorsque la phase de la chaîne modulante est u , l'événement associé peut être :

- une fin de service d'un client dans la file i suivi d'un départ vers l'extérieur avec la proportion $\mu_i(n_i, u)d_i(u)$;
- une fin de service d'un client dans la file i suivi d'un routage en tant que client négatif sans effet dans une file j avec la proportion $\mu_i(n_i, u)P_{ij}^-(u)(1 - R_j(n_j, u))$. Cet événement inclus le cas où la file j est vide ;
- un routage depuis l'extérieur d'un client négatif qui réussit sa destruction dans la file i avec la proportion $\lambda_i^-(u)R_i(n_i, u)$.

Supposons qu'il existe sur cette chaîne, une distribution d'équilibre, le résultat ci-dessous indique que cette solution est à forme produit sous certaines conditions.

THÉORÈME 2 : Soit un G-réseau avec des taux de service dépendants de l'état et d'une phase markovienne satisfaisant la contrainte (9), si le système d'équations non-linéaires suivant :

$$\omega_i(u) = \frac{\Lambda_i^+(u)}{1 + \Theta_i(u)\Lambda_i^-(u)} \quad (10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Lambda_i^+(u) &= \lambda_i^+(u) + \sum_{j=1}^N \omega_j(u) P_{ji}^+(u) \\ \Lambda_i^-(u) &= \lambda_i^-(u) + \sum_{j=1}^N \omega_j(u) P_{ji}^-(u) \end{aligned} \quad (11)$$

admet une solution positive vérifiant pour tout i et pour tout u les deux contraintes suivantes :

1. $\rho_i(n_i, u) = \frac{\omega_i(u)}{\mu_i(n_i, u)}$ est indépendant de u (on conserve cependant la notation $\rho_i(n_i, u)$);
2. la série $\sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{\omega_i(u)}{\mu_i(k, u)}$ converge alors la distribution de probabilités à l'état d'équilibre du système est à forme produit :

$$p(\vec{n}, u) = \pi_u \prod_{i=1}^N p_i(n_i, u) \quad (12)$$

avec pour tout file i du G-réseau et toute phase u :

$$p_i(n_i, u) = p_i(0, u) \prod_{k=1}^{n_i} \frac{\omega_i(u)}{\mu_i(k, u)} \quad (13)$$

$$p_i(0, u) = \frac{1}{1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{\omega_i(u)}{\mu_i(k, u)}}. \quad (14)$$

Preuve du théorème 2 : Il s'agit d'une application élémentaire du corollaire 1 puisque la solution du système non modulé est le produit de distributions géométriques dont les paramètres sont solutions des équations de flux (voir [26]).

Remarque 1 : À défaut d'utiliser ce résultat, on peut écrire l'équation de Chapman Kolmogorov à l'équilibre et vérifier que la solution proposée est la

bonne. Nous ne donnons pas ici cette preuve que l'on peut trouver dans [26], mais par souci de complétude nous expliquons maintenant cette équation et les différents termes qui la composent. Pour tout état (\vec{n}, u) de la chaîne :

$$p(\vec{n}, u) \left[\sum_{i=1}^N (\lambda_i^+(u) + \lambda_i^-(u)R_i(n_i, u) + \mu_i(n_i, u)) + \sum_{\{v \in \mathbf{B}; v \neq u\}} q_{uv} \right] \\ = \sum_{\{v \in \mathbf{B}; v \neq u\}} p(\vec{n}, v)q_{vu} \quad [1]$$

$$+ \sum_{i=1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_i, u)\mu_i(n_i + 1, u)d_i(u) \quad [2]$$

$$+ \sum_{i=1}^N p(\vec{n} - \vec{e}_i, u)\lambda_i^+(u)\mathbb{1}_{\{n_i > 0\}} \quad [3]$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_i - \vec{e}_j, u)\mu_i(n_i + 1, u)P_{ij}^+(u)\mathbb{1}_{\{n_j > 0\}} \quad [4]$$

$$+ \sum_{i=1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_i, u)\lambda_i^-(u)R_i(n_i + 1, u) \quad [5]$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_i + \vec{e}_j, u)\mu_i(n_i + 1, u)P_{ij}^-(u)R_j(n_j + 1, u) \quad [6]$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_i, u)\mu_i(n_i + 1, u)P_{ij}^-(u)(1 - R_j(n_j, u)). \quad [7]$$

La partie gauche de cette équation est l'intensité avec laquelle le système sort de l'état (\vec{n}, u) par :

- une modification de l'état \vec{n} du G-réseau ;
- un changement de phase de l'environnement.

Le membre de droite correspond à l'intensité avec laquelle le système atteint l'état (\vec{n}, u) depuis :

- un changement de phase dans le terme [1] ;
- une fin de service dans la file i et un départ vers l'extérieur dans le terme [2] ;
- une arrivée extérieure de client dans la file i : [3] ;
- une fin de service dans la file i et un routage en tant que client vers une autre file j : [4] ;

- une arrivée extérieure de signal dans la file i où il réussit à supprimer un client : [5] ;
- une fin de service dans la file i et un routage en tant que signal vers une autre file j où il réussit à supprimer un client : [6] ;
- une fin de service dans la file i et un routage en tant que signal vers une autre file j où il ne réussit pas à supprimer un client, c'est-à-dire soit la file j est vide, soit le signal est inopérant : [7].

Ce résultat n'est pas suffisant pour prouver l'existence d'une solution à forme produit, on doit également montrer que le système d'équations non linéaires (10) a une solution dans $\mathbb{R}_+^{N \times M}$ qui vérifie les deux contraintes du théorème.

3.3. Conditions de stabilité

Le système de point fixe trouvé en (10) n'est pas linéaire. Il est difficile de montrer qu'une solution à forme produit existe. Pour une phase u fixée, le problème se ramène à la stabilité d'un seul système de point fixe. Ce cas est traité dans [24] et nous reprenons ici cette méthode en l'adaptant. Pour notre modèle, le problème de point fixe se décompose en M sous systèmes de point fixe. On définit donc la fonction $F : \mathbb{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times M}$ dont les éléments sont pour $\omega = (\omega_i(u)) \in \mathbb{R}^{N \times M}$:

$$F_{i,u}(\omega) \triangleq \frac{\lambda_i^+(u) + \sum_{j=1}^N \omega_j(u) P_{ji}^+(u)}{1 + \Theta_i(u) \left[\lambda_i^-(u) + \sum_{j=1}^N \omega_j(u) P_{ji}^-(u) \right]} \quad (15)$$

Nous pouvons donner des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution à l'équation de flots pour ce G-réseau modulé avec dépendance d'état. La preuve est une application de la théorie des points fixes donnés dans [10] et utilisée dans [8]. En adaptant l'algorithme défini dans [3] à ce modèle, on peut calculer les solutions $\omega_i(u)$ quand elles existent.

THÉORÈME 3 : *Pour tout $u \in \mathbb{B}$, si les matrices $M(u)$ définies par leurs éléments $M_{ij}(u) = \frac{P_{ji}^+(u)}{1 + \Theta_i(u) \lambda_i^-(u)}$ sont transitives alors F admet un point fixe $\hat{\omega} \in \mathbb{R}_+^{N \times M}$ (cf. [16]).*

Preuve : Montrons que F est une fonction qui vérifie les hypothèses du théorème de Brouwer :

1. la fonction F est continue sur un sous ensemble \mathbb{H} de $\mathbb{R}_+^{N \times M}$;
2. $\mathbb{H} \neq \emptyset$;

- 3. \mathbb{H} est un ensemble compact et convexe ;
- 4. $F(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$.

Définissons un nouvel opérateur linéaire et croissant G , par ses composantes telles que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}_+^{N \times M} \text{ et } \forall u \in \mathbb{B} \forall i \in [1..N], F_{i,u}(\omega) \leq G_{i,u}(\omega) \quad (16)$$

on a $\forall i$ et $\forall u, \Theta_i(u) \sum_{j=1}^N \omega_j(u) P_{ji}^-(u) \geq 0$, ainsi l'opérateur G est défini :

$$G_{i,u}(\omega) \triangleq \frac{\lambda_i^+(u) + \sum_{j=1}^N \omega_j(u) P_{ji}^+(u)}{1 + \Theta_i(u) \lambda_i^-(u)} \quad (17)$$

la propriété (16) est notée :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}_+^{N \times M} \quad F(\omega) \preceq G(\omega).$$

Pour chaque phase u , réécrivons G sous forme matricielle. Soit les vecteurs $G_u(\omega) = (G_{i,u}(\omega))_{1 \leq i \leq N}$, $b(u) = \left(b_i(u) = \frac{\lambda_i^+(u)}{1 + \Theta_i(u) \lambda_i^-(u)} \right)_{1 \leq i \leq N}$ et $\omega(u) = (\omega_i(u))_{1 \leq i \leq N}$, on a :

$$G_u(\omega) = b(u) + \omega(u)M(u).$$

Comme on suppose que les matrices $M(u)$ sont transitoires, la matrice $(I - M(u))$ est inversible. L'opérateur G a un point fixe ω^* tel que

$$\forall u \in \mathbb{B} \quad \omega^*(u) = b(u)(I - M(u))^{-1}.$$

Soit \mathbb{H} un sous ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}_+^{N \times M}$, par composante, les composantes sont inférieures aux composantes de ω^* . L'ensembles \mathbb{H} est défini par :

$$\mathbb{H} = \left\{ \omega \in \mathbb{R}_+^{N \times M} : 0 \preceq \omega \preceq \omega^* \right\}.$$

Comme ce G-réseau modulé est ouvert, $\omega^* \neq 0$ et donc \mathbb{H} n'est pas vide. De plus \mathbb{H} est compact et convexe. Comme l'opérateur G est non décroissant sur chacune de ses composantes :

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}_+^{N \times M} \quad \omega_1 \preceq \omega_2 \Rightarrow G(\omega_1) \preceq G(\omega_2)$$

donc

$$\forall \omega \in \mathbb{H} \quad G(\omega) \preceq G(\omega^*)$$

et

$$\forall \omega \in \mathbb{H} \quad F(\omega) \preceq G(\omega) \preceq G(\omega^*) = \omega^*$$

et enfin

$$F(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$$

F est un opérateur continu sur \mathbb{H} , F satisfait les hypothèses du théorème de point fixe de Brouwer donc F a un point fixe dans \mathbb{H} . \square

4. G-RÉSEAU MODULÉ AVEC DESTRUCTIONS MULTIPLES

Nous présentons un autre type de G-réseau modulé ayant une solution à forme produit. L'effet d'un signal est de supprimer un groupe de clients en attente ou en cours de service dans une file [6]. De plus la taille du groupe dépend d'une variable aléatoire extérieure.

4.1. Modèle

Considérons un G-réseau dans un environnement aléatoire dans lequel la synchronisation entre deux files est étendue à un groupe de clients de taille l finie ou infinie. La distribution de la taille des groupes est une variable aléatoire dépendante de l'environnement, c'est-à-dire de l'état de la chaîne de Markov secondaire. Lorsque la phase de cette chaîne est $\{u(t) = u\}$, un signal arrivant dans une file non vide $i \in [1..N]$, essaye de détruire l clients avec la probabilité $S_i(l, u)$. La probabilité $S_i(l, u)$ représente l'effet d'un signal arrivant dans la file i lorsque la phase est u . Si $n_i > l$, alors le nombre de clients dans la file i devient $(n_i - l)$; sinon l'état de la file i est remis à zéro $n_i = 0$. Le taux de service $\mu_i(u)$ d'un client dans la file i est distribué exponentiellement et dépend, dans ce cas, uniquement de la phase u de la chaîne modulante.

Le mouvement des clients et des signaux de ce G-réseau est identique au modèle précédent. Pour tout $j \in [1..N]$, $\{P_{ij}^+(u), P_{ij}^-(u), d_i(u)\}$ représentent les probabilités de transitions d'un client sortant de la file i lorsque la phase est u . Pour toute phase u , on suppose que la matrice de routage d'un client $P^+(u)$ ne contient pas de sous classes récurrentes. Comme pour le modèle précédent, on suppose que les matrices $P(u)$ ont leurs éléments diagonaux nuls : $P_{ii}^+(u) = P_{ii}^-(u) = 0$. On pose $P_{ii}^-(u) = 0$ pour éviter les transitions redondantes et pour simplifier les notations. En effet, un client routé en tant que signal de type l dans la file où il vient d'être

servi, a le même comportement qu'un signal provenant de l'extérieur de type $l + 1$. Donc, pour modéliser des systèmes ayant $P_{ii}^-(u)S_i(l, u) > 0$, il suffit d'accroître la quantité $\lambda_i^-(u)S_i(l + 1, u)$ correspondant au taux d'arrivée extérieur de signaux d'effet $l + 1$ dans la file i .

4.2. Solution à forme produit

Les hypothèses de la section 4 permettent d'affirmer que le processus stochastique $\{(\vec{n}(t), u(t)); t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu sur l'espace d'états $\mathbb{S} \times \mathbb{B}$. Le comportement de cette chaîne de Markov est déterminé de manière unique par ses taux de transition :

Transitions d'états $(\vec{n}(t), u(t)) \rightarrow (\vec{n}'(t), u'(t))$	Taux de transition $\tau[(\vec{n}(t), u(t)); (\vec{n}'(t), u'(t))]$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_N, v)$	q_{uv}
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_N, u)$	$\lambda_i^+(u)$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, n_j + 1, \dots, n_N, u)$	$\mu_i(u)P_{ij}^+(u)$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_N, u)$	$\mu_i(u)d_i(u)$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - l, \dots, n_N, u)$	$\lambda_i^-(u)S_i(l, u)$
$(n_1, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, n_j - l, \dots, n_N, u)$	$\mu_i(u)P_{ij}^-(u)S_j(l, u)$
$(n_1, \dots, n_j = 0, \dots, n_N, u) \rightarrow (n_1, \dots, n_i - 1, n_j = 0, \dots, n_N, u)$	$\mu_i(u)P_{ij}^-(u)$

Si la chaîne $\{(\vec{n}(t), u(t)); t \geq 0\}$ associée à ce G-réseau modulé avec synchronisations multiples, a une distribution de probabilité stationnaire $p[(n_1, n_2, \dots, n_N, u)]$, alors le théorème 4 établit une condition suffisante pour que cette distribution soit à forme produit.

THÉORÈME 4 : *Soit un G-réseau pour lequel la probabilité de supprimer l clients dans la file i dépend à la fois de l'état de la file n_i et de la phase u . Si les vecteurs $(\rho_i(u))_{1 \leq i \leq N}$ pour tout $u \in \mathbb{B}$ sont les solutions positives des systèmes d'équations non-linéaires suivants :*

$$\rho_i(u) = \frac{\Lambda_i^+(u)}{\mu_i(u) + f_i(u)\Lambda_i^-(u)} \tag{18}$$

où :

$$\begin{aligned} \Lambda_i^+(u) &= \lambda_i^+(u) + \sum_{j=1}^N \rho_j(u)\mu_j(u)P_{ji}^+(u) \\ \Lambda_i^-(u) &= \lambda_i^-(u) + \sum_{j=1}^N \rho_j(u)\mu_j(u)P_{ji}^-(u) \end{aligned} \tag{19}$$

$$f_i(u) \triangleq \frac{1 - \sum_{l=1}^{+\infty} (\rho_i(u))^l S_i(l, u)}{1 - \rho_i(u)} \quad (20)$$

et vérifient les deux contraintes suivantes

1. $\rho_i(u)$ est indépendant de u ;
2. $\forall i \in [1..N] \quad \forall u \in \mathbb{B} \quad \rho_i(u) < 1$

alors la chaîne $\{(\vec{n}(t), u(t)); t \geq 0\}$ possède une distribution de probabilité à l'état stationnaire à forme produit :

$$p(\vec{n}, u) = \pi_u \prod_{i=1}^N p_i(n_i, u) \quad (21)$$

où la distribution d'équilibre de la file i en isolation vérifie :

$$p_i(n_i, u) = \prod_{i=1}^N (\rho_i(u))^{n_i} (1 - \rho_i(u)). \quad (22)$$

L'unicité de la solution à forme produit $p(\vec{n}, u)$ donnée en (21) est vérifiée chaque fois que $\rho_i(u)$ peut être calculé pour tout i et pour tout u . Cependant (18) ne garantit pas l'existence d'une solution.

4.3. Cas limite de la remise à zéro

Supposons que pour une phase donnée u , lorsqu'un signal arrive dans une file, son effet est de remettre à zéro l'état de la file, c'est-à-dire de vider instantanément la file de tous ses clients en attente et en service. Ce mécanisme est un cas limite du G-réseau modulé avec synchronisations multiples. Le G-réseau multiclasse avec retour à zéro non modulé a été étudié dans [18]. En utilisant les notations introduites pour des synchronisation de tailles finies, ceci revient à poser :

$$\exists u \in \mathbb{B} \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} S_i(l, u) = 1.$$

La fonction définie en (20) devient $f_i(u) = \frac{1}{1 - \rho_i(u)}$. D'après les hypothèses du théorème 4, la solution $\rho_i(u)$ doit être indépendante de u . On remarque que la nouvelle fonction $f_i(u)$ reste dépendante de la phase u .

4.4. Conditions de stabilité

Comme dans la section 3.3, l'existence d'une solution à forme produit est conditionnée par l'existence d'une solution à l'équation de point fixe donnée en (18). Si une solution $\rho_i(u)$ existe, pour que le G-réseau modulé soit stable, la solution doit être contenue dans un ensemble compact et convexe, donc fermé et borné. Pour un G-réseau modulé avec des destructions groupées de taille finie, la preuve de l'existence d'une solution à forme produit est analogue à la preuve du théorème 3 sur l'existence d'un point fixe d'un système d'équations non-linéaires.

Dans le cas où l'effet du signal est de ramener la file à zéro, on conjecture que si il y a une probabilité non nulle d'arrivée d'un signal dans chaque file, c'est-à-dire $\Lambda_i^- > 0 \forall i$, alors le système de point fixe admet une solution et la contrainte de stationnarité est vérifiée. Ce point est également un problème ouvert pour les réseaux mono ou multiclassés non modulés. Dans ce cadre, cette conjecture n'a pu être démontrée que pour deux cas plus simples : les réseaux sans circuit (DAG) ou lorsque $\lambda_i^- > 0$.

5. CONTRÔLE ET TAUX DE REJET DANS UN RÉSEAU ATM

On considère un réseau à haut débit soumis à des arrivées de trafic très sporadiques. Ceci est, en général, modélisé par un processus d'arrivées modulé par une phase (processus MMPP, IPP, SBBP, etc.). Dans ces réseaux, il a été proposé de distinguer plusieurs classes de clients ayant des caractéristiques de taux de perte différents. Par exemple, dans l'ATM, deux types de trafic (au niveau cellule) ont été prévus et un bit de contrôle porté par chaque cellule (bit CLP) est utilisé pour définir la classe de la cellule. Les cellules de basse priorité spatiale seront détruites de façon préférentielle pour faire de la place aux cellules que l'on achemine avec le meilleur taux de perte. Divers mécanismes élémentaires (PushOut, Partial Buffer Sharing, Random Early Deletion) ont été proposés pour effectuer cette destruction sélective. Des analyses approchées ou exactes pour diverses combinaisons de mécanismes et de discipline de service ont été effectuées pour des files isolées.

Nous nous proposons d'employer le résultat du chapitre 3 pour analyser un réseau soumis à des flux sporadiques mais où contrôle d'accès et routage permettent de garantir une charge constante dans chaque tampon. Il s'agit d'une approximation car le réseau ATM fonctionne avec des services déterministes (les cellules sont de taille constante) et non pas des durées

exponentielles. De plus, les files de notre modèle sont de capacité infinie. On sait cependant fournir une bonne approximation d'un taux de perte dans un buffer fini à partir du modèle d'un buffer infini où par nature il n'y a pas de perte de clients.

Soit ρ_i la charge de la file i dans le modèle avec buffer infini, soit σ_i la probabilité que le buffer infini contienne au moins B clients, un bon estimateur de τ_i la probabilité que le tampon fini soit plein est donné par :

$$\tau_i \approx \frac{(1 - \rho_i)\sigma_i}{1 - \rho_i * \sigma_i}. \quad (23)$$

Cet estimateur est exact pour une M/M/1. Il est meilleur que le simple calcul de la queue de la distribution de la file infinie (c'est-à-dire σ_i , voir [25] pour plus de détails).

Pour contrôler le taux de perte dans le réseau, on suppose que le mécanisme de rejet sélectif agit de façon macroscopique au niveau des flux et non de façon microscopique au niveau des cellules. C'est-à-dire que l'on fait en sorte de garder un taux de charge constant en dépit des fluctuations dues au changement de phase. Ce taux de charge constant nous permet, grâce à l'approximation précédente, de déterminer le taux de perte due à la finitude de la file.

5.1. Modèle simple

Dans un but de simplification, on ne représente que quelques éléments du réseau (voir Fig. 1). Les stations ont toutes le même taux de service et on normalise les flux. Et on suppose que la variable de phase n'a que deux états. Les taux d'arrivées extérieures $\lambda_i^+(u)$ sont dépendants de la phase u , ce qui permet d'avoir des arrivées sporadiques. Les taux de services ne varient pas avec la phase car la distribution de la taille des cellules ne change pas en fonction de la phase. Pour garder un taux de charge constant pour toutes les phases, on contrôle donc certains paramètres : la matrice de routage P^+ ainsi que le taux d'arrivées de signaux extérieurs $\lambda_i^-(u)$ qui provoquent la destruction de cellules. La matrice de routage et transformation P^- est identiquement nulle pour les deux états de la phase.

On suppose que pendant le premier état de la phase, le trafic entre les stations provient des flux AB , AD , DA et BC . Le tableau qui suit indique les

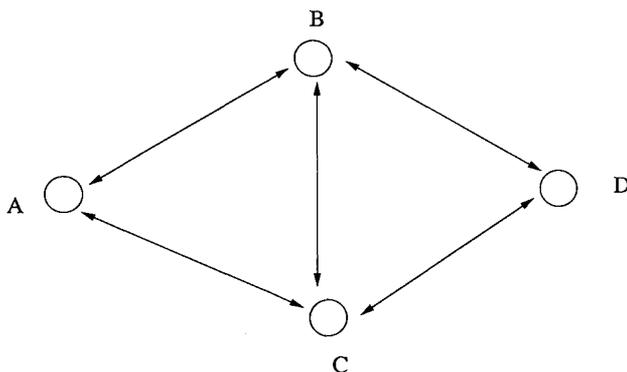


Figure 1. - Réseau élémentaire.

intensités normalisées pour chaque flux ainsi que la répartition sur plusieurs chemins lorsque le routage répartit la charge sur plusieurs routes.

Flux	Intensité	Route et répartition
AB	1/18	AB (100 %)
AD	4/9	ABD (100 %)
BC	0,25	BC (100 %)
DA	0,5	DCA (60 %) et DCBA (40 %)

Le contrôle d'accès pour la station *A* limite la charge à 0,9 car la charge offerte est de 1,0. On perd donc 10 % de la charge en *A*. Ce qui est modélisé par un taux d'arrivée de client négatif dans la station *A* d'intensité 1/9. Tous les autres flux de clients négatifs sont nuls car seule la station *A* a une charge trop élevée. Enfin, le routage des flux donne la matrice de flux suivante, où nous avons fait figurer également les entrées, les sorties normales et les pertes.

	A	B	C	D	Sortie	Perte
A		0,45			0,45	0,1
B	0,2		0,25	0,4	0,05	
C	0,3	0,3			0,25	
D			0,5		0,4	
Entrée	0,5	0,25		0,5		

La charge est donc de 0,9 pour les stations *A*, *B* et *D* et de 0,75 pour la station *C*.

En phase 2 le trafic change :

Flux	Intensité
AC	0,15
AD	0,25
BC	0,2
BD	0,25
DA	0,4

En adoptant les chemins pour les différents flux de la façon suivante, on obtient les mêmes charges pour les quatre stations et ceci sans qu'il soit nécessaire d'utiliser des clients négatifs pour limiter l'accès à une station.

Flux	Route et Répartition
AC	AC (100 %)
AD	ABD (100 %)
BC	BC (50 %), BAC (50 %)
BD	BD (100 %)
DA	DCA (50 %), DBAC (50 %)

Et la matrice de flux vaut alors :

	A	B	C	D	Sortie	Perte
A		0,25	0,25		0,4	
B	0,1		0,3	0,5		
C	0,4				0,35	
D		0,2	0,2		0,5	
Entrée	0,4	0,45		0,4		

Malgré le changement de phase et de trafic, la modification du routage et du contrôle d'accès permet de garder le même vecteur de charge pour les

4 files. Or la charge d'une file d'attente (même généralisée) est le coefficient ρ_i ratio de la géométrie citée dans le corollaire 1. On est donc dans les hypothèses du théorème 2. Les variables de contrôles (routage et accès) permettent dans ce cas, volontairement simplifié, de conserver le même taux de charge dans les files et donc d'utiliser nos résultats pour étudier le réseau.

6. CONCLUSION

Il y a plusieurs autres applications potentielles à ces résultats. En effet, les systèmes dynamiques présentent naturellement des fluctuations aléatoires de leurs caractéristiques au cours du temps, en particulier les processus décrivant le trafic sur des réseaux informatiques ou les arrivées de tâches dans un système adaptatif de contrôle. Par exemple, le modèle de contrôle de charge présenté par Gelenbe *et al.* dans [2] peut être étendu pour prendre en compte une variation des arrivées extérieures représentée par un processus de Poisson modulé. La base théorique de ce travail est la généralisation du théorème de Gelenbe sur les réseaux avec signaux provoquant un déplacement de clients [7] en environnement aléatoire qui s'obtient comme corollaire de notre théorème principal. De même nous nous proposons d'étudier, grâce à ce résultat, la fiabilité de systèmes informatiques avec des pannes destructrices de durée nulle et d'arrivées sporadiques.

Nos résultats, tout comme ceux de Zhu, imposent clairement une limitation pour l'existence d'une forme produit à un réseau de files d'attente modulé. Il nous semble cependant constituer une première étape pour une analyse, sans doute approchée, des réseaux avec files modulées. Il s'agit en tout cas du premier résultat dans le domaine des réseaux de clients positifs et négatifs dans un environnement aléatoire.

La première chose à retenir est que la condition porte sur le ratio de la géométrie de définition de la probabilité marginale et non sur les probabilités de transition. On peut donc avoir des changements de comportements dans le G-réseau mais conserver une forme produit. Par exemple dans le modèle avec destruction en groupe, on peut changer la taille des groupes pour chaque phase et passer de groupe de taille 1 à des groupes de taille 3. La dynamique change complètement avec la phase mais la forme produit subsiste à condition que la charge ρ_i reste constante. Plus généralement, si on considère le théorème 1, la chaîne change avec la phase mais son vecteur propre dominant doit rester le même.

La modulation des files d'un G-réseau permet :

- de changer la vitesse de circulation des clients dans le G-réseau ;

- de modifier le temps de séjour des clients positifs dans le G-réseau ;
- de répartir différemment la probabilité d'avoir une fin de service et la probabilité de destruction par un client négatif à l'intérieur de chaque file ;
- de changer les taux d'arrivée d'un client négatif dans les files c'est à dire depuis l'extérieur ou à l'issue d'une fin de service dans une autre file du réseau ;
- de changer la taille des groupes détruits par un signal.

Un G-réseau dans un environnement aléatoire possède donc un nombre important de paramètres, et il nous semble que certains de ces paramètres peuvent être considérés comme variables de contrôle dont le but est de garantir un taux de charge constant dans les files malgré les variations.

De plus ce résultat nous amène à examiner une extension théorique intéressante qui consiste à chercher une approximation de la solution lorsque la contrainte sur les ratios ρ_i n'est pas vérifiée. L'approche par perturbation, proposée dans un autre contexte [20], suggère une approximation dont le premier terme serait fourni par notre solution à forme produit. Cette approximation aurait sans doute une plus grande portée, par exemple dans le domaine des réseaux avec variation lente des paramètres.

RÉFÉRENCES

1. F. BASKETT, K.M. CHANDY, R.R. MUNTZ et F.G. PALACIOS, Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. *J. ACM* **22** (1975) 248–260.
2. S. CHABRIDON, E. GELENBE, M. HERNANDEZ et A. LEBED, G-networks: A survey of results, applications and solutions, in *QMIPS Conference*.
3. J.M. FOURNEAU, Computing the steady-state distribution of networks with positive and negative customers, in *13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics* (1991).
4. E. GELENBE, Random neural networks with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation* **1** (1990) 502–510.
5. E. GELENBE, Product form queueing networks with negative and positive customers. *J. Appl. Probab.* **28** (1991) 656–663.
6. E. GELENBE, G-networks with signals and batch removal. *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **7** (1992) 335–342.
7. E. GELENBE, G-networks with triggered customer movement. *J. Appl. Probab.* **30** (1993) 742–748.
8. E. GELENBE et R. SCHAASBERGER, Stability of G-networks. *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **6** (1992) 271–276.
9. E. GELENBE et G. PUJOLLE, *Introduction aux réseaux de files d'attente*. Eyrolles (1981).
10. C.D. GARCIA et W.I. ZANGWILL, *Pathways to solutions, fixed points et equilibria*. Prentice-Hall (1981).

11. P. GLYNN, E. GELENBE et K. SIGMANN, Queues with negative customers. *J. Appl. Probab.* **28** (1991) 245–250.
12. W. HENDERSON, Queuing networks with negative customers and negative queue lengths. *J. Appl. Probab.* **30** (1993) 931–942.
13. M. HERNÁNDEZ et J.-M. FOURNEAU, Modelling defective parts in a flow using G-networks, in *Second International Workshop on Performability Modelling of Computer and Communication Systems*. Mont Saint-Michel, France (1993).
14. W. HENDERSON, B.S. NORTHCOTE et P.G. TAYLOR, Teletraffic modelling using queueing networks with signals, in *ITC 13* (1991).
15. W. HENDERSON, B.S. NORTHCOTE et P.G. TAYLOR, State-dependent signalling in queueing networks. *J. Appl. Probab.* **26** (1994) 436–455.
16. R. HUNTER, *Mathematical Technics of Applied Probabilities*, Vol. 2. Academic Press (1983).
17. J.R. JACKSON, Networks of waiting lines. *Oper. Res.* **5** (1957) 518–52.
18. L. KLOUL, J.M. FOURNEAU et F. QUESSETTE, Multiple class G-networks with jumps back to zero, in *Mascots'95*. Durham, North Carolina, USA (1995).
19. F. KELLY, *Reversibility and stochastic networks*. John Wiley & Sons (1979).
20. L. MOKDAD, *Méthodes et outils pour l'évaluation des performances des réseaux informatiques*. Thèse de Doctorat, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines (1997).
21. R. NELSON, *Probability, stochastic processes and queueing theory, the mathematics of computer performance modeling*. Springer Verlag (1995).
22. M.F. NEUTS, *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models, an Algorithmic Approach*. John Hopkins University Press (1981).
23. N.U. PRABHU et Y. ZHU, Markov-modulated queueing systems. *Adv. in Appl. Probab.* **5** (1989) 215–246.
24. F. QUESSETTE, *De nouvelles méthodes de résolution pour l'analyse quantitative des systèmes parallèles et des protocoles*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, Orsay (1994).
25. H. TIJMS, Heuristics for the loss probability in finite buffer queues, in *Conférence on Applied Probability in Engineering, Computer and Communication Sciences* (1993).
26. D. VERCHÈRE, *Méthodes analytiques d'évaluation de performance de systèmes informatiques*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (1997).
27. Y. ZHU, Markovian queueing networks in a random environment. *Oper. Res. Lett.* (1994).