

チャタリングフリー スライディングモードコントロール*

Asif ŠABANOVIC*¹, 和田 憲 造*²
森 岡 弘*³, Karel JEZERNIK*⁴

Chattering Free Sliding Mode Control

Asif ŠABANOVIC, Kenzo WADA,
Hiroshi MORIOKA and Karel JEZERNIK

In this paper, the sliding mode control (SMC) of the systems linear with respect to control is presented. The controller is designed to have continuous control to eliminate chattering and to provide sliding mode motion on the selected manifolds in the state space. These manifolds are selected as a linear combination of the state coordinates. Control is selected to satisfy selected Lyapunov function and stability criteria.

Key Words: Nonlinear Control, Motion Control, Variable Structure Systems, Sliding Mode, Lyapunov Stability

1. 結 言

電動機やロボットマニピレータの制御の分野でスライディングモード制御の応用された例が数多く報告されている^{(1)~(4)}。その中で、制御方式としてスライディングモード制御方式を適用した場合、制御入力の不連続性によりチャタリングが生じるということが基本的に問題点として指摘されている^{(7)~(10)}。この問題点を解決するためさまざまな手法が提案されており、それらは基本的に二つの手法に分けることができる。一つは、いわゆる“Boundary Layer Method”⁽⁷⁾と呼ばれる手法であり、システムの状態がスライディングモードの切換面の近傍にあるときハイゲインフィードバックを行うというものにほかならない。この方法はハイゲインシステムとスライディングモードをもつシステムとは等価であるという考え方に基づいている⁽¹¹⁾。この手法の適用は非常に複雑で、また実験的に適用された例は数例しかない。もう一つの手法は、等価入力を求め、

システムの状態がスライディングモードの切換面に到達後は、この等価入力を制御入力として使用する方法である⁽⁶⁾⁽⁸⁾。この手法を適用する際には、等価入力を求めるために制御対象についての十分な事前情報が必要となる。

本研究ではスライディングモードとリアプノフの安定性に基づいた、非線形システムに対する制御則を提案する。このシステムは入力に関して線形とする。制御目的はシステムの状態変数の線形結合として選択されるスライディングモード関数とその目標値に追従することであり、このことは、システムの動作が状態空間内で選択された切換面の交線に沿って拘束されるような連続な制御入力を選択することを意味している。これらの切換面はスライディングモード関数の選択によって決定され、システムの動特性は切換面の選択に依存する⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

提案したアルゴリズムの特性はシミュレーションにより示される。

2. 制御システムの設計

制御系の設計において、まず最初に次のレギュレータホーム⁽⁴⁾⁽⁶⁾で表される非線形システムを考える。

* 原稿受付 平成6年2月21日。

*¹ Marmara Research Center, P. K. 21, 41470 GEBZE, TURKEY.*² 正員, 山口大学工学部 (〒755 宇部市常盤台 2557)。*³ 正員, 宇部工業高等専門学校 (〒755 宇部市常盤台)。*⁴ University of Maribor, Maribor Smetanova 17, Slovenia.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) + B_2(x)u + B_2(x)d(t) \dots\dots\dots (2)$$

$$u_i \in [u_{i \min}, u_{i \max}] ; (dx_2/dt)_i \in [\alpha_{i \min}, \alpha_{i \max}] \dots\dots\dots (3)$$

$$x_1 \in R^{n-m}, x_2 \in R^m, u \in R^m, f_1 \in F^{n-m}, f_2 \in F^m$$

$$\text{rank } \{B_2(x)\} = m, d(t) \in R^m$$

ここで、 $d(t)$ は外乱を表している。

制御の目標は式(1)～(3)で表されるシステムの動作が状態空間の切換面 S に沿って拘束されるような制御入力 u を決定することである。

$$S = \{x : \varphi(t) - \sigma_a(x) = \sigma(x, t) = 0\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_a = [\sigma_{a1} \dots \sigma_{am}] \in F^m, \varphi = [\varphi_{a1} \dots \varphi_{am}] \in F^m$$

ここで、 $\sigma_{ai}(x)$ と $\varphi_{ai}(t)$ ($i=1, \dots, m$) は連続な関数であり、 $\varphi_{ai}(t)$ は有界な1次導関数を有する有界な関数である。 $\varphi_{ai}(t)$ はシステムの状態変数の線形結合である $\sigma_{ai}(x)$ の目標値として解釈することができる。システムの切換面上における閉ループの特性は切換面の選択に依存する⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

2・1節で不連続な制御入力を有するスライディングモードの設計法を示す。次に、スライディングモードにおける動作の方程式が確立される⁽⁴⁾⁽⁶⁾。また、不連続な制御と同様、式(1)～(3)のシステムが切換面 S に拘束されることを保証する連続な制御入力の設計法を示す。

2・1 不連続な制御入力による設計 スライディングモードを有するVSSの理論では、式(1)～(3)のシステムに対して、次のような不連続な制御入力を用いることにより切換面 S 上でスライディングモードが存在することが証明されている⁽⁴⁾。

$$u(x) = F(x, t) \text{sign} \{\varphi(t) - \sigma_a(x)\} \dots\dots\dots (5)$$

スライディングモードにあるシステムの挙動は、式(5)の不連続な制御入力を等価入力⁽⁴⁾と呼ばれる連続な入力で置き換えることにより解析することができる。等価入力はシステムがスライディングモードにあるとき切換面の時間微分が $d\{\varphi(t) - \sigma_a(x, u = u_{eq})\}/dt = 0$ となることより計算され次式のようになる。

$$u_{eq} = -d + (G_2 B_2)^{-1}(d\varphi/dt - G_2 f_2 - G_1 f_1) \dots\dots\dots (6)$$

したがって、スライディングモードにあるときのシステムの挙動を表す動作の方程式は、式(1)、(2)に式(6)の等価入力を代入することによって得ることができ、次式のようになる。

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \dots\dots\dots (7)$$

$$\sigma_a(x) = \varphi(t) \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$G_1 = [\partial \sigma_a / \partial x_1], G_2 = [\partial \sigma_a / \partial x_2]$$

とする。

スライディングモードの存在条件は $u_{i \min} < u_{i \text{eq}} < u_{i \max}$ が成立すれば満足される。これは式(5)における $F(x, t)$ の選択に制約を設けることになる。もしこのような制御入力に適用されれば、システムの挙動は切換面 S に沿って拘束され、システムの状態は式(8)を満足する。

関数 $\varphi(t)$ と $\sigma_a(x)$ の選択は閉ループの特性を考える上で重要である。例えば、 $\sigma_a(x) = x_2 + \sigma_0(x_1)$ と選択すると、 $x_2 = \varphi(t) - \sigma_0(x_1)$ となり、この値を式(7)における制御入力として考えると、式(7)、(8)は、 $(n-m)$ 次の動的システムとなる⁽⁴⁾。そのシステムは制御入力に依存せず、単にプラントと曲面 $\sigma_i = 0$, ($i=1, \dots, m$) の方程式の特性によってのみ決定される⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

2・2 連続な制御入力による設計 不連続な制御入力の適用は高次のモードの励起を引き起こす可能性がある。一方、パラメータ変動[式(2)についてはあらゆる変動が完全に除去される⁽⁵⁾]と外乱に対するロバスト性、および切換面(4)上でのシステムの低次元化[式(7)、(8)]はスライディングモードを有するシステムの魅力ある特性である。

式(1)～(3)のシステムの状態が切換面 S に拘束される状態をスライディングモードと呼ぶ⁽⁴⁾。これは制御入力に状態の切換面への拘束を保証するように選択されるというスライディングモードの設計法の本質を示している。スライディングモードを有するシステムの他の本質的な特徴は任意の初期状態から切換面 S に到達する時間が有限であるということである。これらのことを制御系設計の枠組みとして、式(1)～(3)のシステムおよび選択された切換面に対して次のような手順で設計を行う。

* リアプノフ関数 $V(\sigma)$ の候補を、リアプノフの安定性が満足されるならば、 $\varphi(t) - \sigma_a(x) = 0$ が式(1)～(3)のシステムの軌道に沿って満足されるように選択する。

* リアプノフ関数の時間微分が満足すべき形[当然のことながら $\dot{V}(\sigma) < 0$ である。]を選択し、そのように選択された関数がシステムと式(4)で表される軌道上で達成されるような制御入力 u を決定する。

* 選択された切換面上の閉ループシステムの特性を決める。

これらの手順が完璧に行われたら、 $\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ が保証され、システムの状態は切換面 S に到達後、切換面に拘束される。すなわち、閉ループシステムの動作は切換面到達後はそのまま切換面上に拘束され、システムは式(7), (8)を満足する。しかし、いままでの手順ではシステムの状態の切換面への到達時間は明確にされていない。切換面への到達過程におけるシステムの方程式は別々に決定されなければならない。この設計手法においてシステムの動作が単にリアプノフ関数の選択によって決定されるためリアプノフ関数はできるだけ簡単なほうがよい。

式(1)～(3)のシステムと選択された切換面に対して次の2次形式のリアプノフ関数を用いる。

$$V = \sigma^T \sigma / 2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$\sigma(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{0}$ はリアプノフ関数の時間微分が次のように表されるならば保証される。

$$\frac{dV}{dt} = -\sigma^T \mathbf{D} \sigma, \quad \mathbf{D}: \text{正定行列} \quad \dots\dots\dots (10)$$

次に $\sigma_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2 + \mathbf{G}\mathbf{x}_1$ によって定義された切換面 S に対して上記の計算を行ってみる。このことは一般性を損なうものではない。 $dV/dt = \sigma^T d\sigma/dt$ および $d\sigma/dt = d\varphi/dt - \mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{u} - \mathbf{B}_2 \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{f}_1$ から制御入力 $\mathbf{u}$ は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{d} + (\mathbf{B}_2)^{-1}(d\varphi/dt - \mathbf{f}_2 - \mathbf{G}\mathbf{f}_1) + (\mathbf{B}_2)^{-1} \mathbf{D} \sigma \\ &= \mathbf{u}_{eq} + (\mathbf{B}_2)^{-1} \mathbf{D} \sigma \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

最初の項は外乱を表している。式(11)の制御入力は切換面 S に到達後 $\mathbf{0}$ になる $(\mathbf{B}_2)^{-1} \mathbf{D} \sigma$ の項を除くと等価入力と等しくなる。しかし、式(11)はその計算において等価入力の情報が必要となるため実用的ではない。ところが式(11)は実行に際して、特に離散表現においてはより実用的な他の形で書き表すことができる。

$dV/dt = \sigma^T d\sigma/dt$ および式(10)より、 $d\sigma/dt = -\mathbf{D} \sigma$ となり、本式を式(11)に代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{eq} = \mathbf{B}_2 \mathbf{u} + d\sigma/dt \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を使用することにより、 $\Delta \rightarrow 0$ の仮定のもとで、式(11)は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \text{sat} \{ \mathbf{u}(t - \Delta) + (\mathbf{B}_2)^{-1} (\mathbf{D} \sigma + d\sigma/dt) \} \\ &\quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{sat}(\cdot)$ は飽和関数を表しており $\mathbf{u}_{\min} = \min[\text{sat}(\cdot)]$, $\mathbf{u}_{\max} = \max[\text{sat}(\cdot)]$ である。時刻 t における制御入力の値は、時刻 $(t - \Delta)$ における制御入力の値と重みをつけられた制御偏差 σ とその時間微分の和から計算される。制御入力は関数 $\sigma(\mathbf{x}, t)$ の不連続点を除き連続な関数である。次に選択された制御入力に対する安定条件について検討する。

式(13)で表される制御入力は式(10)を満足するように決定されたことから $\sigma(\mathbf{x}, t)$ の不連続点を除いた任意の点において $dV/dt = \sigma^T d\sigma/dt = -\sigma^T \mathbf{D} \sigma$ が成立する。これらの点において $\mathbf{u}$ は最大値かまたは最小値をとり、状態 σ の時間微分が有界であるという仮定により安定条件が満足される。もし $\mathbf{D}$ が正定行列ならリアプノフ関数の時間微分は負定となり、 $\sigma(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{0}$ が保証される。すなわち解 $\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ は安定となり、システムの状態は任意の初期状態から切換面 S に到達する。また、式(13)の制御入力は連続な入力となっているためチャタリングの影響を除くことができる。

同じようにアプローチの仕方で違う制御則を作るとは可能であり、そのときには当然リアプノフ関数は異なったものになる。ここでリアプノフ関数の選択については、システムに関するできるだけ少ない情報をもとにしたできるだけ簡単な形のものを見つけるよう留意した。

式(13)の制御入力をもつシステムの動作には三段の段階が考えられる。最初の段階では $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\min}$ または $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\max}$ の入力による動作の軌道上を動く。この段階は不連続な制御入力のときと同じである。第2段階は制御入力が $\mathbf{u}_{\min} < \text{sat}(\cdot) < \mathbf{u}_{\max}$ の範囲であり、システムの動作は次式で表される。

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \mathbf{D} \sigma = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (15)$$

これらの方程式は n 次のダイナミクスで記述される。式(7), (8)のスライディングモードの方程式と比べると、式(14)は式(7)と同じであるが、式(15)は切換面 S からの距離の変化を表す m 個の1階の微分方程式となっている。これらの距離の減少の割合は行列 $\mathbf{D}$ の要素によって決定される。また、標準形で記述されるシステムの動作の方程式は式(15)の次元だけ低次元化されることになる。これらの式は制御入力には依存せず、行列 $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ の選択によってのみ決定される。もし行列 $\mathbf{D}$ が対角行列なら、式(15)は m 個の独立な1階の微分方程式となる。

第3段階は切換面に沿った動作となり、この段階では閉ループの特性は制御入力に依存せず、システムの動作は理想的なスライディングモードの方程式(7), (8)と同じになる。このようにシステム(1)～(3)に対する式(13)で与えられる制御入力は切換面 S 上にあるシステムの安定性を保証する。すなわち状態変数の関数 $\sigma_a(\mathbf{x})$ は $\varphi(t)$ に拘束されることになる。システム(1)～(3)に対して、数学的に式(4)の形式で表

される制御問題は式(13)の制御入力を用いることにより解決することができる。

一般に、式(14)、(15)で表されるシステムの切換面への到達時間は無限である。式(15)により切換面への到達は保証されるが、到達時間は行列 D の選択によって決定される。これが理想的スライディングモードとの基本的な違いである。この違いは式(11)、または式(13)に $u_0 = -l_0 \text{sign}(\sigma)$ を加えることにより解消することができる。この付加により到達時間の有限性は保証され、同時に、不連続な項を加えることによりチャタリングが生じる可能性がある。ここで l_0 はシステムに対する影響を抑制するため、できるだけ小さな値にしなければならない。2・3 節において式(13)の制御入力に対するシステムの動作について詳細に検討する。そして、不連続項を伴わない解法を導入する。ここでは式(13)の制御入力をいかに離散時間表現で実現するかが基本的な問題となる。

2・3 離散値表現における制御入力の実現 式(11)、(13)の制御入力は離散値表現で表すと次のように表せる。

$$u(k) = \text{sat} \{ u_{eq}(k) + (B_2)^{-1} D \sigma(k) \} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$u(k) = \text{sat} [u(k-1) + (B_2)^{-1} \{ D \sigma(k) + d\sigma(k)/dt \}] \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで k は時刻 $t = kT$ ($k=1, 2, \dots$) における値を示している。また T はサンプリング周期である。この制御則によると、式(15)は次のようになる。

$$\sigma(k) = [E - TD] \sigma(k-1) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 E は単位行列である。行列 D を $[E - TD]$ の固有値が単位円内にあるように選択すると、安定性の条件は満足され、このシステムの状態は切換面 S に有限の時間で到達できる。さらに行列 D のすべての対角要素を $d_{ii} = 1/T$ としたならば、式(18)は次式となり、有限サンプルでスライディングモードが切換面上で生じる。

$$\sigma(k) = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

さらに式(17)は $d\sigma(k)/dt = \{\sigma(k) - \sigma(k-1)\}/T$ の 1 次差分近似を使用することで次式のように簡略化できる。

$$u(k) = \text{sat} [u(k-1) + (B_2 T)^{-1} \{ (E + TD) \sigma(k) - \sigma(k-1) \}] \quad \dots\dots\dots (20)$$

この制御入力では $d\sigma(k)/dt$ の計算を行う必要がなく、計算機で実行する上でさらに適した形となっている。

3. シミュレーション結果

提案した制御アルゴリズムの特性を示すために、次の 2 次のシステムに対してシミュレーションを行う

た。その結果を図 1 (a)～(f) に示す。

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 4(u - i_L(t)), \quad u \in [-20, 20], \quad x_2 = dx_1/dt \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$i_L(t) = \begin{cases} 5t < 0.25 \text{ for } 0 < t < 0.25s \\ 5 + 5 \sin(25.84t) \text{ for } t > 0.25s \end{cases}$$

切換面

$$S = \{x_1, x_2 : \varphi(t) - Cx_1 - x_2 = 0, \\ \varphi(t) = Cx_1^{\text{ref}} - x_2^{\text{ref}}, \quad C > 0\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

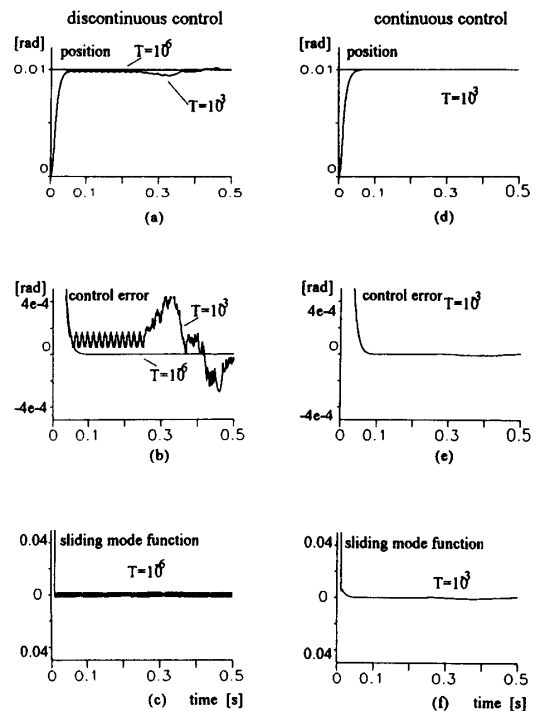


図 1 2 次系に対する不連続な制御入力と連続な制御入力による応答

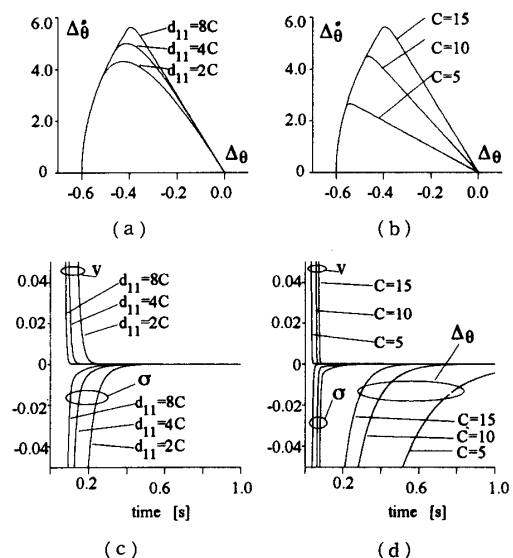


図 2 リアプノフ導関数のシステムの応答に及ぼす影響

ただし

$$x_1^{\text{ref}}=0.01, x_2^{\text{ref}}=0$$

とした。不連続な制御入力に対する応答を図1(a)～(c)に示す。不連続な制御入力はヒステリシスを伴うリレー要素を用いて実現した。式(20)の連続な制御入力に対する応答を図1(d)～(f)に示す。不連続な制御入力を使用したときのサンプリング周期の応答に対する影響を示すため、次の2種類のサンプリング周期 $T=10^{-6}$, $T=10^{-3}$ [s] を使用した。連続な制御入力を用いた場合にはサンプリング周期はすべて $T=10^{-3}$ [s] とした。不連続な制御入力に対する応答からサンプリング周期の影響が大きいことがわかる。長いサンプリング周期の選択は低い周波数のチャタリングを生じる。これはヒステリシスとサンプリング周期による影響であると思われる。連続な制御入力を使用すると応答は滑らかとなり負荷の変動に対してもほとんど影響を受けず、非常に良好な応答が得られている。

図2の位相平面にシステムの動作に対するリアプノフ関数の導関数(行列 $D=d_{11}$) の影響を示す。横軸は $\Delta\theta=x_1^{\text{ref}}-x_1$ 、縦軸はその時間微分を表している。図2(a)は $c=15$ として $d_{11}=2c, 4c, 8c$ としたときの応答を、また図2(b)は $d_{11}=8c$ として $c=5, 10, 15$ としたときの応答を表している。また図2(c), (d)に図2(a), (b)と同様の条件で計算されたリアプノフ関数 V と制御偏差 σ の時間応答を示す。これらの図より切換面 S への到達過程は理論的に予測されたようにリアプノフ関数の傾きを表すパラメータ d_{11} の選択により決定されているのがわかる。

4. 結 論

本論文では入力に対して線形な非線形システムに対

して、選択された切換面上のシステムの動作を安定化するような連続な制御入力を求めるための一般的解法を示した。提案されたアルゴリズムは状態空間内の選択された切換面上におけるスライディングモードの存在条件に基づいて選択されたリアプノフ関数とリアプノフの安定性から導出される。

本アルゴリズムはシミュレーションを通じて確認されたように連続な制御入力をを用いて実現されているため、これまでに問題点として指摘されているチャタリングを抑えることができ、滑らかな応答を得ることができる。

文 献

- (1) Paul R. P., *Robot Manipulators*, (1981), MIT Press.
- (2) Ohnishi, K., *Proc. IEEE IECON'89*, (1989), 348-353, Philadelphia.
- (3) Simura, K., Sugai, M and Hori, Y. *Proc. IECON'91*, 2 (1991-10), 1283-1288, Kobe, Japan.
- (4) Utkin V. I., *Sliding modes in control and optimization*, (1992), Springer-Verlag.
- (5) Drazenovic B., *Automatica*, 5(1969), 287-295, Pergamon Press.
- (6) Luk'yanov, A. G. and V. I. Utkin, *Automation and Remote Control*, 43-4(1981), 413-420.
- (7) Slotine, J. J. and S. S. Shastri., *Int. J. Contr.*, 38-2 (1983), 465-492.
- (8) Furuta K., *System and Control letters*, 14-2(1990), 145-152.
- (9) Drakunov, S. V. and V. I. Utkin, *Proc. of Nonlinear control system design Conf.*, (1989), 273-278, Capri, Italy.
- (10) Wang, W.-J. and G.-H. Wu., *Control-theory and advanced technology*, 8-1 (1992-5), 1-16.
- (11) Izosimov, D. B. and V. I. Utkin, *Automatic and Remote Control*, 11(1981), 189-191.