計測自動制御学会論文集
Vol. 27, No. 12, 1389/1395 (1991)

仮想的な剛体リンクと受動関節を用いたフレキシブルアームのモデリング†

吉川恒夫*・細田　耕*

Modeling of Flexible Manipulators Using Virtual Rigid Links and Passive Joints

Tsuneo YOSHIKAWA* and Koh HOSODA*

In this paper, we propose an approach for modeling flexible manipulators. This approach consists of modeling each flexible link by using virtual rigid links and passive joints which consist of springs and dampers, and modeling the whole arm by connecting the models of individual links. The parameters of the model are determined to make the dynamic and static characteristics of the model coincide with those of the real link. First, the structure of the model is discussed, and a way is shown for determining the parameters of the model from measured characteristics. Then, the dynamic and static characteristics of the model are calculated from its parameters. Using this model, the dynamic equations of motion of the flexible arm are derived in the form of Newton-Euler equations, then reformed to be convenient for solving the direct dynamics problem. An experimental result show that this model can simulate the dynamic and static motion of the real flexible arm fairly well.

Key Words: flexible manipulators, modeling, passive joints, virtual rigid links, identification

1. はじめに

近年，産業用ロボットの軽量化や，その運動の高速化が進んでおり，また宇宙用として，長尺，軽量なアームに対する要求がでている．このような，運動や負荷に対して剛性が低下したアームを取り扱う場合には，アームの柔軟性によるたわみや振動が発生するので，これらを抑制，または補償することが重要な問題となっている．

このような柔軟なロボットアームを制御するためには，まずその動力学的挙動を記述するためのモデルを作る必要がある．従来のモデル化の研究は，偏微分方程式による分布定数系モデル，有限要素モデル，バネ質量系などの集中定数系モデルの3種類に大別できる．偏微分方程式によって記述される分布定数系としてアームをとらえるアプローチ[1),2)]は最も直接的な方法で正確なモデリングが可能であるが，複雑な形状のアームや，多リンク系への拡張が困難である．また実際に運動などを解析するためには偏微分方程式のまま扱うのは難しく，モード展開などの方法で偏微分方程式を近似的に解くことになる[3),4)]．有限要素によってアームを記述する方法[5)]は，分割を十分細かくすることによってかなり近似精度の高いモデルを構成できる可能性があるが，一方で要素が細かすぎると計算時間がかかるという欠点をもつ．集中定数系によるモデル[6)~8)]は，モデル化誤差が大きくなる反面，直感的に理解しやすく計算に時間のかからないモデルを構成することができ，実時間制御に適している．しかしながらほとんどの集中定数系モデルは手先集中荷重が支配的であるという仮定をおいている．Huangら[8)]はこの仮定なしで単純ばりを集中定数系モデルでモデル化しているが，各リンクの全エネルギーが一致するように分割後のモデルの定数を選んでいるために，分割数が少ないと実際のアームとの挙動が著しく異なってくる．また，アームのエネルギーを求めなければならないので，複雑な形状のアームには適用しにくいといった問題点がある．

本論文では以上のような点をふまえて仮想剛体リンク受動関節モデルを提案する．このモデルは柔軟なリンクを複数個の仮想的な剛体リンクとそれをつなぐばね，ダンパなどの受動要素からなる仮想的な受動関節

† 第28回計測自動制御学会学術講演会で発表（1989・7）
* 京都大学工学部　宇治市五ケ庄
* Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji
(Received January 23, 1991)
(Revised July 12, 1991)

によって近似，そのパラメータを静特性，動特性など実際の測定データより同定し，全体のアームをそれが連結したものとしてモデル化する方法であり，集中定数モデルの１種である．このモデル化手法は各リンクを個別にモデル化し，それを連結して全体の系を構成するために，モード展開によるモデル化のように複雑な，あるいは理解しにくい境界条件を考えなくてもよい．またモデルの力学的構造は Huang ら[8]のものや要素数の少ない有限要素モデルに類似しているが，これらが材料特性やリンクの断面形状などの局所的な特性値を用いてモデル化するのに対し，実際のリンクの全体的な動的，静的特性の実測値を用い同定の手法を使ってモデルのパラメータ決定を行っている点で異なっており，これによって実際のアームとより近い挙動を示すようなモデルが作れることが期待される．分割が比較的荒いためにモデル化誤差が大きくなるが，直感的に理解しやすく，また計算量の点でも有利であると考えられる．

以下では，まず提案するモデルの基本的構造と，それに含まれるパラメータを実機の各リンクの動特性と静特性を表わす適当な指標の測定データから決定する方法について述べる．ついでこのモデルパラメータ決定に必要なモデルの動特性および静特性指標の計算式を与える．さらにこのモデルに対するニュートン・オイラー形式の運動方程式を導き，この運動方程式は見通しよく順動力学を解く形に変形できることを示す．最後に提案する方法により実際の平面２リンクのフレキシブルアームのモデル化を行い，モデルと実機の挙動を比較してモデルの有効性を検証する．

2. 剛体リンク受動関節モデルの提案

2.1 モデルの構造とパラメータの決定

提案するモデルは，アームに含まれる柔軟なリンクのそれぞれを，**Fig. 1** に示すように複数個の仮想的な剛体リンクがばね，ダンパなどの受動的要素でできた仮想的な関節（仮想受動関節）によって結合されたものとするようなものである．モータによって駆動される各関節部にもハーモニックドライブなどの柔軟性を考慮した仮想受動関節を考える．このモデルは，仮想剛体リンクの長さ，質量や慣性テンソル，仮想受動関節のバネ定数や減衰係数などの定数パラメータを含むが，これらを実機とモデルの挙動ができるだけ一致するように定めるというのが提案する手法の基本的な考え方である．

定数パラメータの具体的な決定方法としては種々のものが考えられるが，本論文では以下の方法を用いる．すなわち，各フレキシブルリンクの動特性を表わす指標（リンクの固有振動数など），および静特性を表わす指標（静的荷重に対するたわみなど）をとり，これらの値がモデルのそれとできるだけ一致するようにモデルのパラメータを定める．より具体的には実機の動特性指標を $\boldsymbol{\alpha}_{rd}$，静特性指標を $\boldsymbol{\alpha}_{rs}$，全指標を $\boldsymbol{\alpha}_r=[\boldsymbol{\alpha}_{rd}^T, \boldsymbol{\alpha}_{rs}^T]^T=[\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \cdots]^T$ とし，対応するモデルからの計算値を $\boldsymbol{\alpha}_m=[\boldsymbol{\alpha}_{md}^T, \boldsymbol{\alpha}_{ms}^T]^T=[\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \cdots]^T$ としたとき，各データの重要度を示す重みを w_i としてモデルの適合度を表わす評価関数

$$J=\sum_i w_i \frac{(\alpha_{ri}-\alpha_{mi})^2}{\alpha_{ri}^2} \tag{1}$$

が最小となるように各パラメータを決定する．

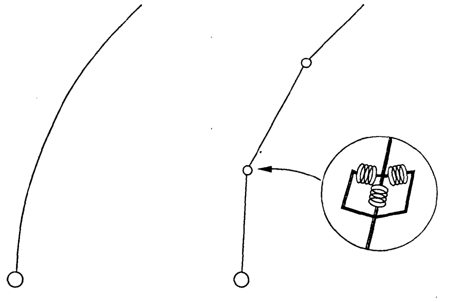


Fig. 1 Modeling of flexible link using virtual rigid links and passive joints

2.2 リンク座標系とパラメータの設定

N 自由度フレキシブルアームについて **Fig. 2** に示

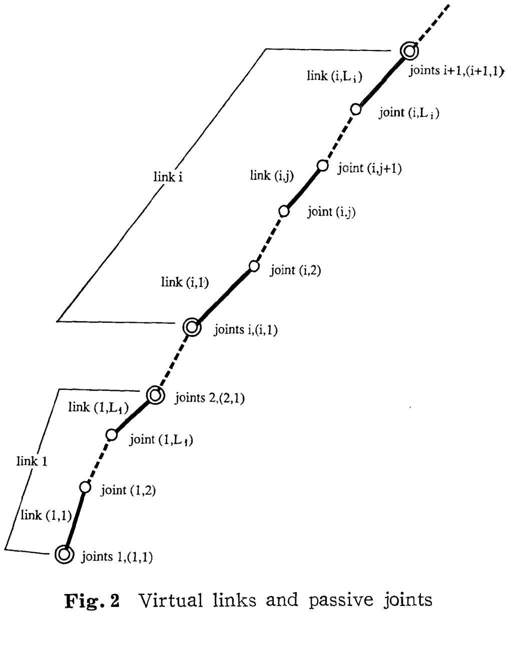


Fig. 2 Virtual links and passive joints

すように各リンク，各関節に番号付けしておく．台座側からフレキシブルリンクをリンク $1,2,\cdots,N$ とし，関節を関節 $1,2,\cdots,N$ とする．リンク i を L_i 個の仮想剛体リンクに分割して台座側から仮想リンク $(i,1),(i,2),\cdots,(i,L_i)$ とし，仮想リンク (i,j) の根元についている仮想的な受動関節を仮想関節 (i,j) と呼ぶ．なお，リンク i の根元側にはモータで能動的に動かすことのできる関節 i と仮想関節 $(i,1)$ が存在することに注意されたい．

基準座標系 Σ_0 を台座に固定してとる．関節 i のモータと仮想リンク (i,j) に固定されたリンク座標系を **Fig. 3** に示すように設定する．関節 i に固定されたリンク i 座標系 Σ_i は原点を関節 i とし，回転軸方向に z_i 軸をとり，仮想関節 $(i,1)$ がまったくたわんでいないとき，関節 $(i,1)$ におけるリンクの接線の z_i 軸直交成分のみを取り出して x_i 軸とし，それらと右手系をなすように y_i 軸をとる．そしてこのモータの変位を関節 i の変位 θ_i とする．仮想リンク (i,j) についてのリンク座標系 Σ_{ij} は原点をそのリンクの台座側の仮想関節 (i,j) にとり，荷重がかかっていないときにリンク i 座標系と方向が一致するよう各軸をとる．

以上のリンク座標系を元にしてモデルのパラメータを以下のように表記する．仮想関節の x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} 軸まわりの回転変位を $(\phi_{ij})_x$, $(\phi_{ij})_y$, $(\phi_{ij})_z$ とし，各軸方向に対するばね定数を $(k_{ij})_x$, $(k_{ij})_y$, $(k_{ij})_z$, 減衰係数を $(d_{ij})_x$, $(d_{ij})_y$, $(d_{ij})_z$, とする．そして $\boldsymbol{\phi}_{ij}=[(\phi_{ij})_x,(\phi_{ij})_y,(\phi_{ij})_z]^T$, $\boldsymbol{k}_{ij}=[(k_{ij})_x,(k_{ij})_y,(k_{ij})_z]^T$, $\boldsymbol{d}_{ij}=[(d_{ij})_x,(d_{ij})_y,(d_{ij})_z]^T$ とおく．ここで，T は行列またはベクトルの転置を表わす．m_{ij}, ${}^{ij}\hat{\boldsymbol{p}}_{ij}$, ${}^{ij}\hat{\boldsymbol{s}}_{ij}$, ${}^{ij}\boldsymbol{I}_{ij}$ はそれぞれ仮想リンク (i,j) の質量，Σ_{ij} 座標系からみた関節 $(i,j+1)$ の原点ベクトル，重心位置ベクトル，重心まわりの慣性行列を表わすものとする．

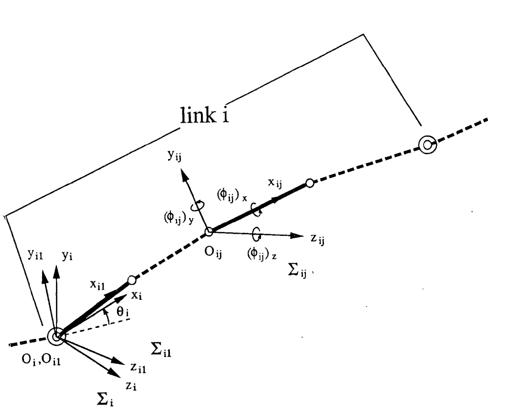


Fig. 3 Coordinate frames of virtual links

2.3 モデルの動特性および静特性

本節ではいくつかの仮定を満たすモデルに対して，各リンクの動特性，および静特性を表わす指標の値を求める．まず簡単のため，リンクは仮想剛体リンクの慣性主軸とそのリンク座標系の方向が一致しており，重心とつぎの仮想剛体リンクに関するリンク座標系の原点が x 軸上にあるようにリンク座標系をとれるようなものであると仮定する．このとき，x-y, x-z, y-z 各平面内の運動は独立となるので扱いが単純になる．さらに仮想剛体リンクが，モータによって駆動される根元リンク，両端が隣の仮想リンクにつながっている中間リンク，一端が自由な先端リンクという３種類に分類できることに注目し，これら３種のリンクをもつ最も簡単な場合として $L_i=3$ のケースを考えることにする．また，減衰係数は共振周波数にほとんど影響がない程度に小さいとする．

まず動特性を考える．x-y 平面内の微小振動を考えると **Fig. 4** に示すように３本の仮想剛体リンクをもつ第 i フレキシブルリンクのモデルについて，モータ側の仮想リンクが固定され，もう一方の端のリンクが自由であるときの振動の運動方程式は，振動が十分小さいとして振動に関する変位の２次以上の微小項と非線形項および減衰項を無視すると以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} M_{z11} & M_{z12} \\ M_{z21} & M_{z22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\ddot{\phi}_{i2})_z \\ (\ddot{\phi}_{i3})_z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_{i2})_z & 0 \\ 0 & (k_{i3})_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\phi_{i2})_z \\ (\phi_{i3})_z \end{bmatrix}=0 \tag{2}$$

ここで

$$M_{z11}=m_{i2}({}^{i2}\hat{s}_{i2})_x^2+m_{i3}({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x^2+m_{i3}({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x^2 +2m_{i3}({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x+({}^{i2}I_{i2})_{zz}+({}^{i3}I_{i3})_{zz}$$

$$M_{z12}=M_{z21} =m_{i3}({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x^2+m_{i3}({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x({}^{i3}\hat{s}_3)_x+({}^{i3}I_{i3})_{zz}$$

$$M_{z22}=m_{i3}({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x^2+({}^{i3}I_{i3})_{zz}$$

である．この振動の方程式より導かれる二つの固有振動数 $\omega_{zi}(i=1,2)$ は次式を満たす．

$$(k_{i2})_z(k_{i3})_z-\omega_{zi}^2(M_{z22}(k_{i2})_z+M_{z11}(k_{i3})_z) +(M_{z11}M_{z22}-M_{z12}^2)\omega_{zi}^4=0 \tag{3}$$

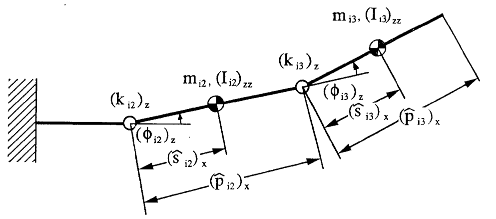


Fig. 4 Flexible link model with 1-end clamped, 1-end free

x-z 平面内，y-z 平面内の運動についても同様の式を導くことができる．すなわち，x-z 平面内の固有振動数 $\omega_{yi}(i=1,2)$，y-z 平面内の固有振動数 $\omega_{xi}(i=1,2)$ について

$$(k_{i2})_y(k_{i3})_y-\omega_{yi}^2(M_{y22}(k_{i2})_y+M_{y11}(k_{i3})_y)+(M_{y11}M_{y22}-M_{y12}^2)\omega_{yi}^4=0 \tag{4}$$

$$(k_{i2})_x(k_{i3})_x-\omega_{xi}^2(M_{x22}(k_{i2})_x+M_{x11}(k_{i3})_x)+(M_{x11}M_{x22}-M_{x12}^2)\omega_{xi}^4=0 \tag{5}$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned}
M_{y11}&=m_{i2}({}^{i2}\hat{s}_{i2})_x^2+m_{i3}({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x^2+m_{i3}({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x^2\\
&\quad+2m_{i3}({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x+({}^{i2}I_{i2})_{yy}+({}^{i3}I_{i3})_{yy}\\
M_{y12}&=M_{z21}\\
&=m_{i3}({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x^2+m_{i3}({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x+({}^{i3}I_{i3})_{yy}\\
M_{y22}&=m_{i3}({}^{i3}\hat{s}_{i3})_x^2+({}^{i3}I_{i3})_{yy}\\
M_{x11}&=({}^{i2}I_{i2})_{xx}+({}^{i3}I_{i3})_{xx}\\
M_{x12}&=M_{x21}=M_{x22}\\
&=({}^{i3}I_{i3})_{xx}
\end{aligned}$$

である．

つぎに静特性を考える．モデルの x-y 平面内のたわみについて考えると，手先に集中力 P がかかったときの手先変位，変位角 u_P，ϕ_P，および集中モーメント M がかかったときのそれら u_M，ϕ_M は

$$\begin{bmatrix} u_P/P \\ \phi_P/P \\ u_M/M \\ \phi_M/M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x+({}^{i3}\hat{p}_{i3})_x)^2 & ({}^{i3}\hat{p}_{i3})_x^2 \\ ({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x+({}^{i3}\hat{p}_{i3})_x & ({}^{i3}\hat{p}_{i3})_x \\ ({}^{i2}\hat{p}_{i2})_x+({}^{i3}\hat{p}_{i3})_x & ({}^{i3}\hat{p}_{i3})_x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/(k_{i2})_z \\ 1/(k_{i3})_z \end{bmatrix} \tag{6}$$

となる．x-z，y-z 平面内の静的変位についても同様の式を導くことができる．

なお，ここでは3分割の場合を扱っているが，4分割以上の場合にも同様な式を誘導できる．x-y，y-z，x-z の各平面内の微小運動が分離できない場合にも，式はこのように簡単にはならないが同様な方法によってモデルの特性指標を求めることが可能である．

2.4 N 自由度アームに関する運動方程式

本項では N 自由度フレキシブルアームに対して上述の方法によって作られたモデルの運動方程式をニュートン・オイラー法[9]によって記述する．そして，関節駆動力が与えられた場合にモデルの応答をシミュレーションする，いわゆる順動力学問題の解を求めるのに適した形に変換する．

リンク $a-1$ 座標系からリンク a 座標系への回転変換を表わす行列 ${}^{a-1}\boldsymbol{R}_a\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$ $(a=(1,1),(1,2),\cdots,(N,L_N))$ は，ϕ_{ij} が十分小さいという仮定をもとに

$${}^{a-1}\boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}(\theta_i)\begin{bmatrix} 1 & -(\phi_a)_z & (\phi_a)_y \\ (\phi_a)_z & 1 & -(\phi_a)_x \\ -(\phi_a)_y & (\phi_a)_x & 1 \end{bmatrix}$$
$(a=i1$ の場合)

$${}^{a-1}\boldsymbol{R}_a=\begin{bmatrix} 1 & -(\phi_a)_z & (\phi_a)_y \\ (\phi_a)_z & 1 & -(\phi_a)_x \\ -(\phi_a)_y & (\phi_a)_x & 1 \end{bmatrix}$$
(その他の場合) (7)

と書ける．ここで，$\boldsymbol{R}(\theta_i)$ は $\Sigma_{(i-1,L_{i-1})}$ から Σ_i への回転変換行列である．この ${}^{a-1}\boldsymbol{R}_a$ を用いるとリンク a 座標系からみたリンク a の角速度 ${}^a\boldsymbol{\omega}_a$ に関する関係式が，

$${}^a\boldsymbol{\omega}_a={}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^{T\,a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1}+[(\dot{\phi}_a)_x(\dot{\phi}_a)_y(\dot{\phi}_a)_z+\dot{\theta}_i]^T$$
$(a=i1$ の場合) (8)

$${}^a\boldsymbol{\omega}_a={}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^{T\,a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1}+[(\dot{\phi}_a)_x(\dot{\phi}_a)_y(\dot{\phi}_a)_z]^T$$
(その他の場合) (9)

と表わされ，角加速度の関係式が

$$\begin{aligned}
{}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}_a&={}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^{T\,a-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{a-1}+({}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^{T\,a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1})\\
&\quad\times[(\dot{\phi}_a)_x(\dot{\phi}_a)_y(\dot{\phi}_a)_z]^T\\
&\quad+[(\ddot{\phi}_a)_x(\ddot{\phi}_a)_y(\ddot{\phi}_a)_z+\ddot{\theta}_i]^T
\end{aligned}$$
$(a=i1$ の場合) (10)

$$\begin{aligned}
{}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}_a&={}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^{T\,a-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{a-1}+({}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^{T\,a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1})\\
&\quad\times[(\dot{\phi}_a)_x(\dot{\phi}_a)_y(\dot{\phi}_a)_z]^T\\
&\quad+[(\ddot{\phi}_a)_x(\ddot{\phi}_a)_y(\ddot{\phi}_a)_z]^T
\end{aligned}$$
(その他の場合) (11)

と表わされる．リンク a 座標系からみた関節 a の並進加速度を ${}^a\ddot{\boldsymbol{p}}_a$，重心の並進加速度を ${}^a\ddot{\boldsymbol{s}}_a$ とすると

$$\begin{aligned}
{}^a\ddot{\boldsymbol{p}}_a&={}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^T\{{}^{a-1}\ddot{\boldsymbol{p}}_{a-1}+{}^{a-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{a-1}\times{}^{a-1}\hat{\boldsymbol{p}}_{a-1}\\
&\quad+{}^{a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1}\times({}^{a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1}\times{}^{a-1}\hat{\boldsymbol{p}}_{a-1})\}
\end{aligned} \tag{12}$$

$${}^a\ddot{\boldsymbol{s}}_a={}^a\ddot{\boldsymbol{p}}_a+{}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}_a\times{}^a\hat{\boldsymbol{s}}_a+{}^a\boldsymbol{\omega}_a\times({}^a\boldsymbol{\omega}_a\times{}^a\hat{\boldsymbol{s}}_a) \tag{13}$$

が得られる．

リンク a 座標系からみた仮想受動関節 a からリンク a が受ける力，モーメントを ${}^a\boldsymbol{f}_a$，${}^a\boldsymbol{n}_a$ とすると，${}^a\boldsymbol{n}_a$ は

$$\begin{aligned}
{}^a\boldsymbol{n}_a&=-[(k_a)_x(\phi_a)_x\ \ (k_a)_y(\phi_a)_y\ \ (k_a)_z(\phi_a)_z]^T\\
&\quad-[(d_a)_x(\dot{\phi}_a)_x\ \ (d_a)_y(\dot{\phi}_a)_y\ \ (d_a)_z(\dot{\phi}_a)_z]^T
\end{aligned} \tag{14}$$

となる．リンク a 座標系からみたリンク a の加速度によってリンク自身にかかる力，モーメントを ${}^a\hat{\boldsymbol{f}}_a$，${}^a\hat{\boldsymbol{n}}_a$ とするとリンク a に関する力の釣合の式は，

$${}^a\boldsymbol{f}_a={}^a\boldsymbol{R}_{a+1}{}^{a+1}\boldsymbol{f}_{a+1}+{}^a\hat{\boldsymbol{f}}_a \tag{15}$$

モーメントの釣合の式は，

$$\begin{aligned}
{}^a\boldsymbol{n}_a&={}^a\boldsymbol{R}_{a+1}{}^{a+1}\boldsymbol{n}_{a+1}+{}^a\hat{\boldsymbol{n}}_a+{}^a\hat{\boldsymbol{s}}_a\times{}^a\hat{\boldsymbol{f}}_a+{}^a\hat{\boldsymbol{p}}_a\\
&\quad\times({}^a\boldsymbol{R}_{a+1}{}^{a+1}\boldsymbol{f}_{a+1})
\end{aligned} \tag{16}$$

となる．ただし，${}^{NL_N+1}\boldsymbol{f}_{NL_N+1}$，${}^{NL_N+1}\boldsymbol{n}_{NL_N+1}$ は終端リンク (N,L_N) 座標系からみた外部から終端リンクに

加えられる力およびモーメントである．並進の運動方程式，回転の運動方程式にあたる式は ${}^a\boldsymbol{I}_a$ をリンク a 座標系からみたリンク a の慣性行列であるとすると，

$$ {}^a\hat{\boldsymbol{f}}_a = m_a^a\ddot{\boldsymbol{s}}_a \tag{17}$$

$$ {}^a\hat{\boldsymbol{n}}_a = {}^a\boldsymbol{I}_a^a\dot{\boldsymbol{\omega}}_a + {}^a\boldsymbol{\omega}_a \times ({}^a\boldsymbol{I}_a^a\boldsymbol{\omega}_a) \tag{18}$$

のように書ける．能動関節 i についての運動方程式は以下のようになる．

$$ \tau_i = I_{0i}\ddot{\theta}_i + \gamma_{FCi}\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_i) + \gamma_{FVi}\dot{\theta}_i - (k_{i1})_z(\phi_{i1})_z - (d_{i1})_z(\dot{\phi}_{i1})_z \tag{19}$$

ただし，I_{0i} は関節 i のモータのバネ下慣性，γ_{FCi}，γ_{FVi} はそれぞれクーロン摩擦，粘性摩擦係数である．なお，この式にバックラッシュなどの影響を加えることは容易である．以上の(8)式から(19)式までをまとめたものがニュートン・オイラー法による N 自由度フレキシブルアームの運動方程式である．重力による影響は従来の剛体アームに関するニュートン・オイラー法の場合と同様に，(12)式において ${}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_0 = \boldsymbol{g}$ とおくことにより含めることができる．ここで $\boldsymbol{g}$ は基準座標系 Σ_0 から見た重力ベクトルである．

ここで提案したモデルを使うと順動力学問題に対する解が式の形をあまり変えずに求まる．${}^a\ddot{\boldsymbol{s}}_a$，${}^a\ddot{\boldsymbol{p}}_a$ は順動力学問題を解くためには特に必要ないので，並進の運動方程式(17)に運動学的な関係式(12)，(13)式を適用して消去することにより次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_a}{}^a\hat{\boldsymbol{f}}_a - \frac{1}{m_{a-1}}{}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^{T\,a-1}\hat{\boldsymbol{f}}_{a-1}\\
&\quad + {}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^T[({}^{a-1}\hat{\boldsymbol{p}}_{a-1} - {}^{a-1}\hat{\boldsymbol{s}}_{a-1})\\
&\quad \times \{({}^{a-1}\boldsymbol{I}_{a-1})^{-1}\,{}^{a-1}\hat{\boldsymbol{n}}_{a-1}\}]\\
&\quad + {}^a\hat{\boldsymbol{s}}_a \times \{({}^a\boldsymbol{I}_a)^{-1}\,{}^a\hat{\boldsymbol{n}}_a\}\\
&= {}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^T[({}^{a-1}\hat{\boldsymbol{p}}_{a-1} - {}^{a-1}\hat{\boldsymbol{s}}_{a-1})\\
&\quad \times \{({}^{a-1}\boldsymbol{I}_{a-1})^{-1}({}^{a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1} \times ({}^{a-1}\boldsymbol{I}_{a-1}\,{}^{a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1}))\}]\\
&\quad + {}^{a-1}\boldsymbol{R}_a^T[{}^{a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1} \times \{{}^{a-1}\boldsymbol{\omega}_{a-1}\\
&\quad \times ({}^{a-1}\hat{\boldsymbol{p}}_{a-1} - {}^{a-1}\hat{\boldsymbol{s}}_{a-1})\}]\\
&\quad + {}^a\hat{\boldsymbol{s}}_a \times [({}^a\boldsymbol{I}_a)^{-1}\{{}^a\boldsymbol{\omega}_a \times ({}^a\boldsymbol{I}_a^a\boldsymbol{\omega}_a)\}]\\
&\quad + {}^a\boldsymbol{\omega}_a \times ({}^a\boldsymbol{\omega}_a \times {}^a\hat{\boldsymbol{s}}_a)
\end{aligned} \tag{20}$$

この式は相隣るリンクにかかる慣性力の間の関係式になる．

この式と(15)，(16)式を連立させて ${}^a\hat{\boldsymbol{n}}_a$ を解き出すことができる．

以上の式を用い，ある時刻において θ，$\dot{\theta}$，ϕ，$\dot{\phi}$，τ が与えられたときに $\ddot{\theta}$，$\ddot{\phi}$ を求めるためのアルゴリズムを **Fig. 5** に示す．これとルンゲ-クッタ法などの適当な数値積分アルゴリズムを組み合せることによって順動力学問題の解を求めることができる．

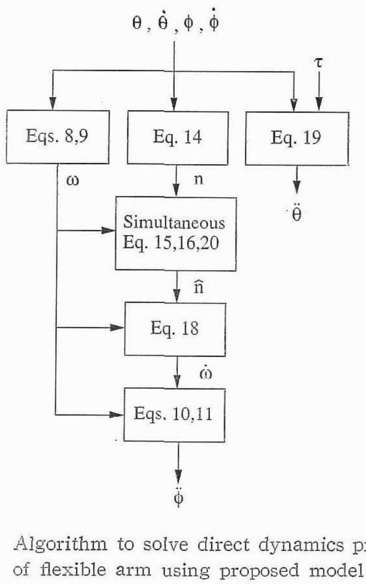
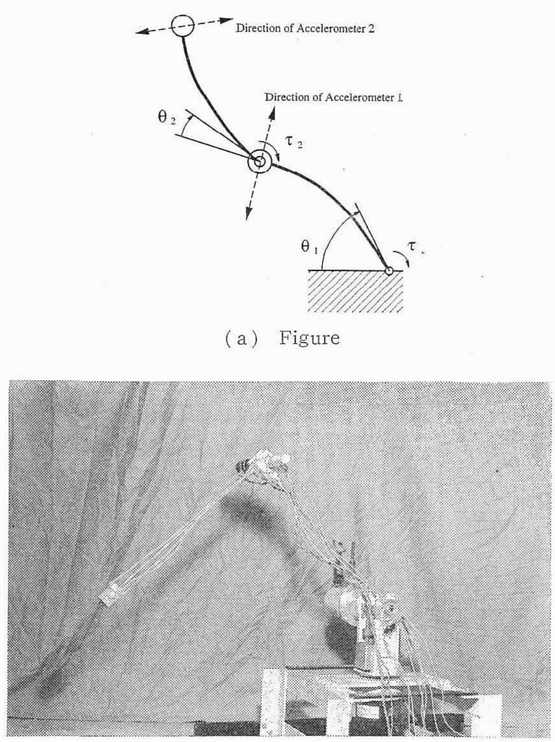


Fig. 5 Algorithm to solve direct dynamics problem of flexible arm using proposed model

3. 平面2リンクアームに対するモデルの妥当性の検証

Fig. 6 に示すような二つのフレキシブルリンクをもつ平面2自由度フレキシブルアームについてモデル化を行い，得られたモデルの妥当性を検証するために



(a) Figure

(b) Photograph

Fig. 6 2-flexible-link robot used for experiment

実機とモデルのステップ応答の比較を行った.

モデル化の対象とした実機の各リンクは第一リンクが長さ 0.61 (m), 直径 0.010 (m), 質量 0.4807 (kg) のバネ鋼丸棒, 第二リンクが長さ 0.60 (m), 直径 0.006 (m), 質量 0.1473 (kg) のバネ鋼丸棒で, 各関節はDCサーボモータにより駆動される. 関節3に付いているモータが 2.1 (kg) の質量をもち, リンク3の先端には負荷として 0.55 (kg) の質量が取り付けられている.

アームを分解し, これらの質量を取り外したときの各リンクの特性指標を測る. 動特性の指標としてそのリンクの固有振動を, 静特性の指標として手先に集中的な力, モーメントがかかったときの手先変位, 変位角を測定した. すなわち, (1)式での $\boldsymbol{\alpha}_r$ として

$$\boldsymbol{\alpha}_r=[\omega_{z1}\ \omega_{z2}\ u_P/P\ \phi_P/P\ u_M/M\ \phi_M/M]^T$$

をとった. このデータをもとに2.3節の方法によりこのリンクをモデル化する. ここで扱うアームは各リンクが真直で各回転軸と直交しており, 慣性主軸がリンク座標系と一致するので各リンクを3分割し, $L_i=3$ $(i=1,2)$ とすると2.3節の考察がそのまま使える.

ある ${}^i\hat{p}_i(i=2,3)$ を選びそこでアームを仮想的に切断することにより, k_i 以外のパラメータを求めることができる. ${}^i\hat{p}_i$ と他のパラメータを独立に選ぶこともできるが, その決定が複雑になるのでここでは仮想的に実際のリンクを切断することにより従属に選ぶことにする. そこで(3)式より k_i を求め, これらの値よりそのときの J を求める. J を最小にする ${}^i\hat{p}_i$ を求めるためには何らかの最適化手法を用いることが考えられるが, ここでは ${}^i\hat{p}_i$ をステップごとに刻んでとり, その中で最小の J をとるものを最適解とした. モデル化の際のデータに対する重みとして, リンク1, リンク2とも

$$\boldsymbol{w}=[100.0\ 100.0\ 1.0\ 1.0\ 1.0\ 1.0\ 1.0]^T$$

とし, モデルのパラメータを決定した. 動特性, 静特性指標の測定データ $\boldsymbol{\alpha}_r$ とモデルの特性値 $\boldsymbol{\alpha}_m$ を **Table 1** に, 決定されたモデルのパラメータを **Table 2** に示す. 減衰係数については他のパラメータ決定後, リンクを固定した場合の梁としての振動についてシミュレーションにより出力された波形が実験の波形と合うように試行錯誤的に決定した. 以上のように, 個々のリンクを先端質量をはずした場合についてそれぞれモデル化し, アーム全体をこれらが連結し, 後から質量を取り付けたものとしてモデルを作る. また, シミュレータを作るためには(19)式にあるモータの特性が必要である. これを **Table 3** に示す.

得られたモデルの妥当性を検証するために実機とモ

Table 1 Characteristic data of real arm and of model

Link number	Item	$\boldsymbol{\alpha}_r$	$\boldsymbol{\alpha}_m$
Link 1	Displacement for P(m/N)	0.000216	0.000298
	Anguler displacement for P(rad/N)	0.000408	0.000629
	Displacement for M(N)	0.000408	0.000629
	Anguler displacement for M(rad/N·m)	0.000869	0.001465
	1st Natural frequency (Hz)	24.5	25.5
	2nd Natural frequency (Hz)	138.5	142.6
Link 2	Displacement for P(m/N)	0.004682	0.006850
	Anguler displacement for P(rad/N)	0.013260	0.013400
	Displacement for M(N)	0.013260	0.013400
	Anguler displacement for M(rad/N·m)	0.053150	0.031680
	1st Natural frequency (Hz)	9.25	9.37
	2nd Natural frequency (Hz)	72.75	72.77

Table 2 Parameters of the model (2-link)

(a) Virtual rigid links (link 1)

Item	Link(1, 1)	Link(1, 2)	Link(1, 3)
Length : $\hat{p}_i$(m)	0.0061	0.2806	0.3233
Gravity center : $\hat{s}_i$(m)	0.0031	0.1403	0.1617
Mass : m_i(kg)	0.0048	0.2211	0.2548
Inertia I_i(kg·m²)	4.495×10^{-8}	1.452×10^{-3}	2.221×10^{-3}

(b) Virtual rigid links (link 2)

Item	Link(2, 1)	Link(2, 2)	Link(2, 3)
Length : $\hat{p}_i$(m)	0.0360	0.2940	0.2700
Gravity center : $\hat{s}_i$(m)	0.0180	0.1470	0.1350
Mass : m_i(kg)	0.0088	0.0722	0.0663
Inertia I_i (kg·m²)	9.744×10^{-7}	5.201×10^{-4}	4.028×10^{-4}

(c) Virtual passive joints (link 1)

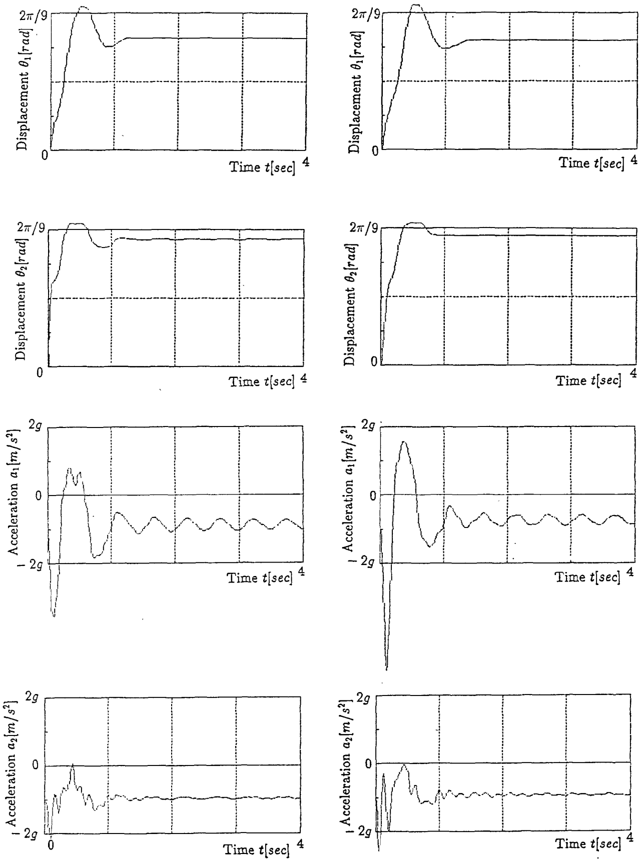
Item	Joint(1, 2)	Joint(1, 3)
Spring constant : k_{1i}(N·m/rad)	1.80×10^3	1.10×10^3
Damping constant : d_{1i}(N·m·s/rad)	0.5	1.0

(d) Virtual passive joints (link 2)

Item	Joint(2, 2)	Joint(2, 3)
Spring constant : k_{2i}(N·m/rad)	54.0	76.0
Damping constant : d_{2i}(N·m·s/rad)	0.1	0.2

Table 3 Characteristic of the motors

Item	Active joint 1	Active joint 2
Inertia under spring(kg·m²)	0.4643	0.151
Static coulomb friction(N)	7.0	5.0
Dynamic coulomb friction(N)	4.79	2.9
Viscous friction(N·s²/m)	3.18	3.55
Spring constant(N·m/rad)	2800.0	1400.0



(a) Real arm　　　(b) Proposed model

Fig. 7 Response of displacement and vibration of real arm and proposed model
(the case when the joints are controlled by PD feedback)

デルに同じゲインのPD制御を適用したときの振動のようすを比較する．目標値は，能動関節角 θ_1, θ_2 を時刻0にステップ状に 0 (rad)→$2\pi/9$ (rad) と変化させる軌道で与え，ゲインは位置ゲインを $[k_{p1}, k_{p2}]$=[223.2 (N·m/rad), 137.5 (N·m/rad)]，速度ゲインを $[k_{d1}, k_{d2}]$=[14.88 (N·m·s/rad), 4.58 (N·m·s/rad)] とし，サンプリングタイムは 2.0 (ms) とした．手先の振動のようすは手先の加速度で見ることとし，実機では手先に加速度センサを取り付けることによってこれを測定した．結果を **Fig. 7** に示す．モデルは過渡状態および定常状態の両方において実機の挙動にかなり近い応答をしていることがわかる．定常値が目標値 $2\pi/9$ (rad) からずれているのは重力補償をしていないからであり，このずれも実機とモデルであっている．なお，モデルの応答は 2.4 節で求めた順動力学問題の解を与えるシミュレータによって求めたものである．

4. 終わりに

本論文ではフレキシブルアームのモデルとして仮想剛体リンク受動関節モデルを提案，モデル化の方法を示し，N 自由度フレキシブルアームについての運動方程式をニュートン・オイラー法をもとに求め，順動力学問題の解を与える形に変形した．そしてシミュレーションおよび実験によって実機とこのモデルの挙動がよく合っていることを示した．

今後の課題としては，本論文で採用した動特性，静特性の指標では減衰係数を決定できないので，解析的に減衰係数が決定できるような動特性指標を求めることがある．また，本論文ではモデルのパラメータ決定の際に実際のアームを仮想的に切断するなどの拘束を加えてパラメータ決定を簡単にしたが，このような拘束を取り去った場合のパラメータを決定する方法についても考察を加える余地がある．

参考文献

1) W. J. Book, O. Maizza-Neto and D. E. Whitney: Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems with Distributed Flexibility, Trans. ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, **97**, 424/431 (1975)
2) R. H. Cannon and E. Schmitz: Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot, Int. J. of Robotics Research, **3**-3, 62/75 (1984)
3) F. Pfeiffer: A Feedforward Decoupling Concept for the Control of Elastic Robots, J. of Robotic Systems, **6**-4, 407/416 (1989)
4) 下山，三浦：静たわみ曲線を利用したフレキシブルアームの動力学モデル，日本ロボット学会誌，**6**-5, 72/78 (1988)
5) W. H. Sunada and S. Dubowsky: On the Dynamic Analysis and Behavior of Industrial Robotic Manipulators with Elastic Members, Trans. ASME, J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, **105**, 42/51 (1983)
6) 坂和，松野ほか：3自由度フレキシブルマニピュレータのモデリングと加速度センサを用いた振動制御，日本ロボット学会誌，**6**-1, 42/51 (1988)
7) 吉川，村上，細田：2本のフレキシブルリンクを有する3自由度マニピュレータのモデリングと制御，日本ロボット学会誌，**9**-1, 1/10 (1991)
8) Y. Huang and C. G. S. Lee: Generalization of Newton-Euler Formulation of Dynamic Equations to Nonrigid Manipulators, Trans. ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, **110**, 308/315 (1988)
9) J. Y. S. Luh, M. W. Walker and R. P. C. Paul: On-Line Conputational Scheme for Mechanical Manipulators, Trans. ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, **102**, 69/76 (1980)