

## Methoden

Stefan Gering\* und Jürgen Adamy

# Synthese von Zustands- und Ausgangsrückführungen für rekurrente Fuzzy-Systeme

Synthesis of State- and Output-Feedback for Recurrent Fuzzy Systems

**Zusammenfassung:** Als spezielle Klasse dynamischer Fuzzy-Systeme bieten rekurrente Fuzzy-Systeme die Möglichkeit, dynamische Prozesse anhand von Expertenwissen oder Messdaten zu modellieren. Dabei zeichnet sich die Regelbasis durch die Möglichkeit der linguistischen Interpretierbarkeit und somit der Transparenz aus. Dieser Artikel stellt Ansätze vor, mit denen sowohl (beobachterbasierte) Zustands- als auch Ausgangsrückführungen zur Stabilisierung bekannter Ruhelagen mit Hilfe bilinearer Matrixungleichungen ausgelegt werden können. Die sich ergebenden Regler sind dabei strukturell äquivalent zu Fuzzy-Reglern und können somit ebenfalls linguistisch interpretiert werden. Hinsichtlich der Ausgangsrückführungen wird gezeigt, dass sich bekannte Syntheseansätze aus der linearen Systemtheorie ebenfalls auf Ausgangsrückführungen für rekurrente Fuzzy-Systeme übertragen lassen.

**Schlüsselwörter:** Rekurrente Fuzzy-Systeme, beobachterbasierte Zustandsrückführungen, Ausgangsrückführungen.

**Abstract:** As a special class of dynamical fuzzy systems, recurrent fuzzy systems allow for the modeling of dynamical processes based on expert knowledge or measurements. The rule base is characterized by the possibility of linguistic interpretability and thus transparency. This article presents methods for the synthesis of (observer-based) state feedback as well as output feedback for stabilization of known equilibria by means of bilinear matrix inequalities. The structure of the controllers obtained is equivalent to fuzzy controllers, thus allowing again for a linguistic interpretability. With regards to output feedback it is shown that well known approaches from linear systems theory

may be adapted to the synthesis of output feedback for recurrent fuzzy systems.

**Keywords:** Recurrent Fuzzy systems, observer-based state feedback, output feedback.

DOI 10.1515/auto-2014-1105

Eingang 26. März 2014; angenommen 7. Juli 2014

## 1 Einleitung

Bei der Regelung dynamischer Systeme ist die Modellbildung von zentraler Bedeutung, da sie meistens die Grundlage für den Reglerentwurf bildet. Ist kein präzises Systemmodell sondern lediglich Expertenwissen oder Messdaten vorhanden, so können diese Informationen zur approximativen Modellierung verwendet werden, um anschließend einen Regler basierend auf diesem approximativen Modell zu entwerfen. Auch wenn bereits Regelungsmethoden zur Regelung ohne Systemmodell existieren (*model free control*, [6]), ist es im allgemeinen dennoch sinnvoll, bestehende Systeminformationen zur Reglersynthese nutzbar zu machen. Im Bereich der *Gray-box-Modellierung* ist bereits eine Vielzahl von Ansätzen bekannt, welche basierend auf Fuzzy Logik eine approximative Beschreibung der Systemdynamik erreichen wollen. Bei diesen Konzepten sind tendenziell zwei unterschiedliche Zielsetzungen erkennbar: Zum einen kann versucht werden, messdatengestützt ein möglichst präzises Modell zu bestimmen. Neuro-Fuzzy-Systeme (siehe z.B. [16]) seien hier als Beispiel genannt, bei denen mit hinreichend vielen Neuronen der Modellierungsfehler verschwindet. Mit steigender Präzision geht jedoch bei diesen Ansätzen eine verminderte Transparenz einher. Dies steht zunächst im Widerspruch zur Idee der Fuzzy-Logik, mathematische Systembeschreibung und sprachliche Interpretierbarkeit zu verbinden. Vielmehr ist bei allen dynamischen Fuzzy-Systemen ein

---

\*Korrespondenzautor: Stefan Gering, Technische Universität Darmstadt, E-Mail: sgering@rmr.tu-darmstadt.de  
Jürgen Adamy: Technische Universität Darmstadt

Kompromiss zwischen Präzision und Transparenz zu beobachten. Bei den prominenten Takagi-Sugeno-Systemen [14] ist beispielsweise die Prämisse linguistisch interpretierbar, die Konklusionen sind jedoch lineare oder affine Subsysteme, sodass sich insgesamt nur eine bedingte linguistische Interpretierbarkeit ergibt. Gleichzeitig gehören Takagi-Sugeno-Systemen ebenfalls zur Klasse der universalen Approximatoren, für die Exaktheit des Modells können jedoch mitunter beliebig viele Regeln notwendig sein.

Die in diesem Beitrag betrachteten rekurrenten Fuzzy-Systeme (RFS) [2] unterscheiden sich zu Takagi-Sugeno-Systemen in der Beschreibung von Zustandsänderungen durch Konstanten innerhalb der Konklusion. Im Gegensatz zu Takagi-Sugeno-Systemen ist so eine linguistische Interpretierbarkeit einzelner Regeln möglich, deren Anzahl jedoch aufgrund der Einschränkung auf konstante Konklusionen in der Regel zu einer größeren Regelbasis im Vergleich zu Takagi-Sugeno-Systemen mit gleicher Präzision führt.

Dieser Artikel beschreibt nun die Synthese stabilisierender Zustands- und Ausgangsrückführungen für ein gegebenes RFS. Dazu wird zunächst in Abschnitt 2 gezeigt, wie aus der Systembeschreibung anhand der Regelbasis eine Systemdarstellung in Interpolationsform abgeleitet werden und diese wiederum in eine hybride Systemdarstellung überführt werden kann. Nachdem in [8] die Synthese von Zustandsreglern anhand heuristischer Kriterien mit anschließender Stabilitätsanalyse beschrieben wurde, wird nun in Abschnitt 3 gezeigt, wie für das approximative RFS ähnlich dem Prinzip der *parallel distributed compensation* [10, 15] eine Zustandsrückführung anhand der Interpolationsform ausgelegt werden kann. Diese zeichnet sich insbesondere durch ihre strukturelle Äquivalenz zu statischen Fuzzy-Reglern aus und kann ebenfalls linguistisch interpretiert werden. Die verwendeten hinreichende Stabilitätskriterien für das geregelte System führen dabei auf ein Optimierungsproblem mit bilinearen Matrixungleichungen.

Sind nicht alle Zustände messbar, so bietet die hybride Systemdarstellung die Möglichkeit zum Entwurf eines linearisierenden Beobachters, wie in Abschnitt 3.2 skizziert wird. Ein anderer Ansatz ist die Auslegung von Ausgangsrückführungen. Wie Abschnitt 4 zeigt, können dazu bekannte Ansätze aus der linearen Systemtheorie verwendet werden. Hierzu zählen die Approximation von Zustandsrückführungen sowie die direkte Berücksichtigung struktureller Beschränkungen.

Die beschriebenen Regelungsmethoden werden anhand eines akademischen Beispiels in Abschnitt 5 verdeutlicht und abschließende Bemerkungen in Abschnitt 6 gegeben.

## 2 Rekurrente Fuzzy-Systeme

Die Dynamik rekurrenter Fuzzy-Systeme [1] ist durch linguistische Regeln

$$\begin{aligned} \text{Wenn } \mathbf{x} &= \mathbf{L}_j^{\mathbf{x}} \text{ und } \mathbf{u} = \mathbf{L}_q^{\mathbf{u}}, \\ \text{dann } \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{L}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (1)$$

definiert. Die Gesamtheit aller Regeln wird als *Regelbasis* bezeichnet und kann als Teil des statischen Fuzzy-Systems aufgefasst werden, das in Abbildung 1 als Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  dargestellt ist.

Die Zustände  $\mathbf{x}$  und Eingänge  $\mathbf{u}$  sind dabei im Eingangs-Zustandsraum  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$  definiert, mit  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}]$ . Mit  $\mathbf{L}_q^{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{L}_j^{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{L}_{\mathbf{w}(j,q)}^{\dot{\mathbf{x}}}$  werden in (1) Vektoren linguistischer Werte  $L_{j_i}^{\mathbf{x}_i}$ ,  $L_{q_i}^{\mathbf{u}_i}$ ,  $L_{w_i}^{\dot{\mathbf{x}}_i}$  bezeichnet, welche die Eingänge und Zustände sowie deren Ableitungen qualitativ beschreiben, z.B. als *niedrig* oder *sehr hoch*.

Zur Beschreibung des Ausgangsverhaltens definiert  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^r$  analog zur Dynamikfunktion ein statisches Fuzzy-System mit Regeln der Form

$$\begin{aligned} \text{Wenn } \mathbf{x} &= \mathbf{L}_j^{\mathbf{x}}, \\ \text{dann } \mathbf{y} &= \mathbf{L}_j^{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2)$$

welche als von der Stellgröße  $\mathbf{u}$  unabhängig angenommen werden, was in vielen technischen Systemen eine realistische Annahme ist.

Um die in *Regelbasis-Form* vorliegende Systembeschreibung (1), (2) in eine numerische Beschreibung zu überführen, werden zunächst Kernpositionsvektoren  $\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{s}_q^{\mathbf{u}} \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}]$ ,  $\mathbf{s}_j^{\mathbf{y}} \in [y_{\min}, y_{\max}]$  mit den linguistischen Vektoren assoziiert. Dabei wird zur Vereinfachung der Notation angenommen, dass die Menge der Kernpositionsvektoren  $\mathbf{s}_j^{\mathbf{x}}$  in  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und in  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  identisch sind. Durch Verwendung des Indexvektors  $\mathbf{j}$  für Kernpositionen im Zustandsraum,  $\mathbf{q}$  im Eingangsraum und  $\mathbf{w}$  als Index von Kernpositionsgradienten kann jede Regel ebenfalls als Abbildung  $(\mathbf{j}, \mathbf{q}) \mapsto \mathbf{w}$  dargestellt werden. Dass die Regelbasis Gradienten nur an diskreten Punkten auf einem Gitter im Eingangs-Zustandsraum definiert, zeigt auch Abbildung 2. Im Folgenden wird das Gebiet, welches durch Kernpositionsgradienten adjazent zu einem Vektor  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  begrenzt ist, als *Hyperquader*  $H_{\mathbf{l}}$  bezeichnet. Der Index  $\mathbf{l} = (\mathbf{j}, \mathbf{q})$  setzt sich dabei aus den kleinsten Indizes der

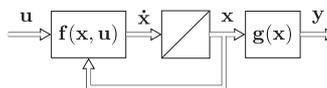
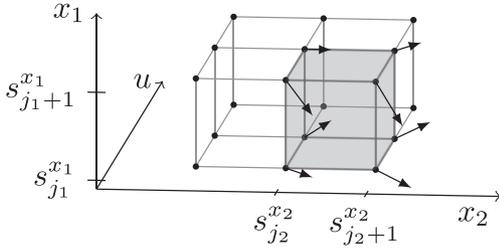
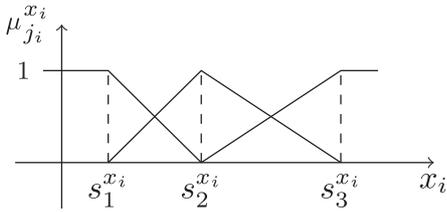


Abbildung 1: Rekurrentes Fuzzy-System.



**Abbildung 2:** Hyperquader des RFS im Eingangs-Zustandsraum. Beispielhaft sind Kernpositionsgradienten eingezeichnet, welche die Dynamik im eingefärbten Gebiet definieren.



**Abbildung 3:** Rampen- und dreieckförmige Zugehörigkeitsfunktionen.

begrenzenden Kernpositionen zusammen. Hyperquader, welche nur im Zustandsraum oder nur im Eingangsraum betrachtet werden, sind mit  $H_j^x$  und  $H_q^u$  bezeichnet, sodass  $H_1 = H_j^x \cup H_q^u$  gilt. Mitunter wird bei Eindeutigkeit auch die alternative Indexnotation  $H_1^x = H_j^x$  und  $H_1^u = H_q^u$  verwendet.

Um auch im Inneren von Hyperquadern einen numerischen Wert für die Zustandsänderung  $\dot{x}$  sowie den Ausgang  $y$  des RFS bestimmen zu können, werden zur Fuzzifizierung zunächst Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{j_i}^{x_i}(x_i)$ ,  $\mu_{q_p}^{u_p}(u_p)$  eingeführt, wobei dreieck- und rampenförmige Zugehörigkeitsfunktionen

$$\mu_{j_i}^{x_i} = \begin{cases} \frac{x_i - s_{j_i-1}^{x_i}}{s_{j_i}^{x_i} - s_{j_i-1}^{x_i}}, & x_{i,\min} \leq s_{j_i-1}^{x_i} \leq x_i < s_{j_i}^{x_i} \leq x_{i,\max}, \\ \frac{s_{j_i+1}^{x_i} - x_i}{s_{j_i+1}^{x_i} - s_{j_i}^{x_i}}, & x_{i,\min} \leq s_{j_i}^{x_i} \leq x_i < s_{j_i+1}^{x_i} \leq x_{i,\max}, \\ 1, & x_{i,\min} \geq x_i \vee x_i \geq x_{i,\max}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

angenommen werden (siehe Abbildung 3). Neben der einfachen Darstellung bieten dreieckförmige Zugehörigkeitsfunktionen den Vorteil, dass kompliziertere Funktionen, wie z.B. Trapeze, aus ihnen zusammen gesetzt werden können (siehe auch [12]).

Wie in [1] beschrieben, wird nun als Aggregations- und Implikationsoperator das algebraische Produkt gewählt, sodass sich für die UND-Verknüpfung der Prämissen einer

Regel

$$\mu_{j,q}^{\text{agg}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i) \prod_{q=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_p) \quad (4)$$

sowie durch Auswertung der Implikation

$$\mu_{j,q}^{\text{imp}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = s_{w(j,q)}^{\dot{x}} \cdot \mu_{j,q}^{\text{agg}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5)$$

ergibt. Zur Akkumulation

$$\mu^{\text{akk}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j,q} \mu_{j,q}^{\text{imp}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (6)$$

wird dann die algebraische Summe gewählt sowie die Center-of-singletons-Methode zur Defuzzifizierung:

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\mu^{\text{akk}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\sum_{j,q} \mu_{j,q}^{\text{agg}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}. \quad (7)$$

In [9] wird gezeigt, dass sich dieser Ausdruck weiter vereinfacht, wenn sich Zugehörigkeitsfunktionen an jedem Punkt zu 1 aufsummieren. Diese Bedingung wird durch (3) erfüllt, sodass sich die folgende Systembeschreibung in *Interpolationsform* ergibt:

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j,q} s_{w(j,q)}^{\dot{x}} \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i) \prod_{p=1}^m \mu_{q_p}^{u_p}(u_p), \quad (8a)$$

$$y = g(\mathbf{x}) = \sum_j s_j^y \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i). \quad (8b)$$

Setzt man (3) explizit in diese Form ein, so vereinfacht sich diese Interpolationsform erneut, da lediglich diejenigen Kernpositionen mit  $\mu_{j_i}^{\text{agg}} \neq 0$  ausgewertet werden müssen, welche adjazent zu  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  sind. Durch die Multiplikation abschnittsweise affiner Zugehörigkeitsfunktionen erhält man so für einen Hyperquader  $H_{j,q}$  mit  $s_{j_i}^{x_i} \leq x_i \leq s_{j_i+1}^{x_i}$  und  $s_{q_p}^{u_p} \leq u_p \leq s_{q_p+1}^{u_p}$  zunächst

$$\begin{aligned} \dot{x} = & s_{w(j,q)}^{\dot{x}} \left( \frac{x_1 - s_{j_1}^{x_1}}{s_{j_1+1}^{x_1} - s_{j_1}^{x_1}} \right) \dots \left( \frac{x_n - s_{j_n}^{x_n}}{s_{j_n+1}^{x_n} - s_{j_n}^{x_n}} \right) \\ & \cdot \left( \frac{u_1 - s_{q_1}^{u_1}}{s_{q_1+1}^{u_1} - s_{q_1}^{u_1}} \right) \dots \left( \frac{u_m - s_{q_m}^{u_m}}{s_{q_m+1}^{u_m} - s_{q_m}^{u_m}} \right) \\ & + \dots + \\ & s_{w(j+1,q+1)}^{\dot{x}} \left( \frac{s_{j_1}^{x_1} - x_1}{s_{j_1+1}^{x_1} - s_{j_1}^{x_1}} \right) \dots \left( \frac{s_{j_n}^{x_n} - x_n}{s_{j_n+1}^{x_n} - s_{j_n}^{x_n}} \right) \\ & \cdot \left( \frac{s_{q_1+1}^{u_1} - u_1}{s_{q_1+1}^{u_1} - s_{q_1}^{u_1}} \right) \dots \left( \frac{s_{q_m+1}^{u_m} - u_m}{s_{q_m+1}^{u_m} - s_{q_m}^{u_m}} \right), \quad (9) \end{aligned}$$

wobei lediglich Zugehörigkeitsfunktionen derjenigen Kernpositionen von Null verschieden sind, welche zu  $H_{j,q}$

gehören. Weiter kann dann (9) zusammengefasst werden zur *hybriden Systemdarstellung*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_0^1 + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{x_i}^1 x_i + \sum_{p=1}^m \mathbf{a}_{u_p}^1 u_p + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{a}_{x_{ij}}^1 x_i x_j + \sum_{p=1}^m \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{x_i u_p}^1 x_i + \dots + \mathbf{a}_{x_1 \dots x_n u_1 \dots u_m}^1 x_1 \dots x_n u_1 \dots u_m, \quad (10)$$

welche die Dynamik in  $H_1 = H_{j,q}$  beschreibt. Die Interpolation zwischen konstanten Kernpositionsgradienten im Eingangs-Zustandsraum führt so zu einer abschnittsweise multi-affinen Systemdynamik. Hinsichtlich der angestrebten Reglersynthese werden schon hier zwei wesentliche Probleme erkennbar: Zum einen ist die Systemdynamik im allgemeinen nicht eingangs-affin. Zum anderen hängt die Zustandsänderung sowohl direkt von  $\mathbf{u}$  ab, als auch indirekt aufgrund der abschnittswisen Definition. So gilt (10) lediglich in einem Teil des Eingangsraums, d.h. für  $\mathbf{u} \in H_q^u$ .

In [13] wurde gezeigt, dass sich (10) auch in kompakter Matrixnotation

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_1^x \Delta_{n+m} \Omega_1 \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (11)$$

angeben lässt. Darin fasst

$$\mathbf{S}_1^x = [\mathbf{s}_1^x, \dots, \mathbf{s}_{l+1}^x] \quad (12)$$

spaltenweise sämtliche Kernpositionsgradienten des Hyperquaders  $H_1$  zusammen, während

$$\Delta_n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

gilt, wobei die mehrfache Anwendung des Kronecker-Produkts als

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{A}_n \quad (14)$$

notiert ist. Über die Matrix

$$\Omega_1 = \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{O}_i, \quad \mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-s_i}{\bar{s}_i - s_i} & \frac{1}{\bar{s}_i - s_i} \end{bmatrix} \quad (15)$$

gehen die begrenzenden Kernpositionen  $\underline{\mathbf{s}}_1 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \bar{\mathbf{s}}_1$  des Hyperquaders  $H_1$  ein, während der Monomenvektor

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \bigotimes_{i=1}^{n+m} \begin{bmatrix} 1 \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (16)$$

alle Produktterme in  $x_i$  und  $u_q$  zusammenfasst.

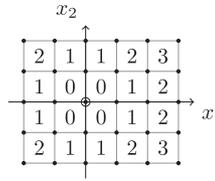


Abbildung 4: Hyperquaderabstand  $d(H_1^x, \mathbf{0})$  zur Ruhelage.

Ausgehend von der Interpolationsform (8) sowie der hybriden Systemdarstellung in Matrixform (11) werden im nächsten Abschnitt Reglersynthesemethoden für Zustands- und Ausgangsrückführungen diskutiert. Dazu wird angenommen, dass das RFS beobachtbar und steuerbar ist. Zu Details dieser Systemeigenschaften von RFS sei auf [5] verwiesen. Des Weiteren wird vereinfachend angenommen, dass sich die zu stabilisierende Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  im Ursprung befindet und mit einer Kernposition  $\mathbf{s}_j^x$  inzident ist. Dann kann anhand der Pseudometrik

$$d(H_1^x, \mathbf{s}_j^x) = \min_1 \sum_{k=1}^n |l_k - j_k|, \quad \mathbf{l} : \mathbf{s}_1^x \in H_1^x \quad (17)$$

der Abstand eines Hyperquaders zur Ruhelage angegeben werden, wie Abbildung 4 verdeutlicht.

Als weitere Notation bezeichnet im Folgenden  $\mathcal{H}$  die Menge aller Hyperquader sowie  $\mathcal{H}_0^x = \{H_j^x \mid d(H_j^x, \mathbf{0}) = 0\}$  die Menge aller Hyperquader, welche die Ruhelage enthalten. Zudem wird mit  $\mathbf{M} > 0, (< 0)$  eine symmetrische positiv (negativ) definite Matrix bezeichnet, mit \* abgekürzte Elemente einer Matrix ergeben sich aus ihrer Symmetrie und  $\text{He}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$ . Mit  $\otimes$  wird das *Kronecker-Produkt* bezeichnet und  $\mathbf{I}_n$  ist eine quadratische Einheitsmatrix der Dimension  $n$ .

### 3 Synthese von Zustandsrückführungen

#### 3.1 Fuzzy-Regler

Die Dynamik (1), welche an diskreten Kernpositionen definiert ist und sich für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}_j^x$  durch eine Interpolation benachbarter Kernpositionsgradienten ergibt, legt den Ansatz nahe, auch den Regler anhand konstanter Kernpositionsstellgrößen  $\mathbf{s}_j^r$  zu definieren. Daher wird als Regelgesetz der Ansatz

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_j \mathbf{s}_j^r \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i) \quad (18)$$

gewählt, welcher mehrere Vorteile bietet: Zum einen kann das Regelgesetz erneut linguistisch interpretiert werden,

bei zusätzlicher Einschränkung  $\mathbf{s}_j^r \in \cup \mathbf{s}_q^u$  in der gleichen Terminologie wie das RFS selbst:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } \mathbf{x} &= \mathbf{L}_j^x, \\ \text{dann } \mathbf{u} &= \mathbf{L}_q^u. \end{aligned} \quad (19)$$

Andererseits ist (18) per Definition stetig, sodass sich trotz der abschnittswisen Systemdefinition ein erneut stetiger Trajektorienverlauf des geregelten Systems ergibt.

Analog zu (11) kann auch der interpolierende Regler (18) in kompakter Matrixschreibweise

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_j^r \Delta_n \Omega_j \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

mit  $\mathbf{S}_j^r = [\mathbf{s}_j^r, \dots, \mathbf{s}_{j+1}^r]$  notiert werden.

Werden in der Interpolationsform (8a) die Prämissenauswertungen mit  $w_j(\mathbf{x})$ ,  $w_q(\mathbf{u})$  abgekürzt, kann die Systemdynamik

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{j,q} \dot{\mathbf{s}}_{w(j,q)}^x \cdot w_j(\mathbf{x}) \cdot w_q(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{H_q^u \in \mathcal{H}^u} w_q \cdot \mathbf{S}_{jq}^x \Delta_{n+m} \Omega_{jq} \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &= \sum_{H_q^u \in \mathcal{H}^u} w_q \sum_{s_j^x \in H_j^x} w_{j'} (\mathbf{A}_{j'q} \mathbf{x} + \mathbf{a}_{j'q} + \mathbf{B}_{j'q} \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (21)$$

als Interpolation zwischen affinen Subsystemen dargestellt werden, wobei

$$\mathbf{A}_{j'q} = \mathbf{S}_{jq}^x \Delta_{n+m} \Omega_{jq} \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{s}_j^x \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}}, \quad (22a)$$

$$\mathbf{a}_{j'q} = \mathbf{S}_{jq}^x \Delta_{n+m} \Omega_{jq} \mathbf{Z}(\mathbf{s}_j^x, \mathbf{0}) - \mathbf{A}_{j'q} \mathbf{s}_j^x, \quad (22b)$$

$$\mathbf{B}_{j'q} = \mathbf{S}_{jq}^x \Delta_{n+m} \Omega_{jq} \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{s}_j^x \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}} \quad (22c)$$

ist. Zu beachten ist hierbei, dass diese Darstellung eine Ähnlichkeit zu affinen T-S-Systemen aufweist, für die [10] die Reglersynthese diskutiert. Allerdings weist (21) zwei wesentliche Unterschiede auf: Erstens existiert nicht ein einziges affines Subsystem für jede Kernposition, wie dies bei T-S-Systemen der Fall ist, sondern  $2^{n+m}$  in Abhängigkeit vom betrachteten Hyperquader. Zweitens spiegelt die zusätzlich notwendige Interpolation im Eingangsraum dessen Partitionierung wider.

Ebenso wie (21) kann das interpolierende Regelgesetz (20) in die Darstellung

$$\mathbf{u} = \sum_{s_j^x \in H_j^x} \mathbf{K}_{j'} \mathbf{x} + \mathbf{k}_{j'}, \quad (23)$$

überführt werden, mit

$$\mathbf{K}_{j'} = \mathbf{S}_j^r \Delta_n \Omega_{jq} \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{s}_j^x} \quad (24a)$$

$$\mathbf{k}_{j'} = \mathbf{S}_j^r \Delta_n \Omega_{jq} \mathbf{Z}(\mathbf{s}_j^x) - \mathbf{K}_{j'} \mathbf{s}_j^x. \quad (24b)$$

Mit Hilfe einer quadratischen Ljapunow-Funktion  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{P} > 0$ , werden nun hinreichende Stabilitätskriterien zur Bestimmung der unbekanntenen Kernpositionsstellgrößen  $\mathbf{s}_j^r$  formuliert. Dazu wird gefordert, dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \text{He} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \} \\ &= \sum_{s_q^u \in \mathcal{H}^u} w_q \sum_{s_j^x \in H_j^x} w_{j'} \cdot \text{He} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_{j'q} \mathbf{x} + \dots \\ &\quad \mathbf{a}_{j'q} + \mathbf{B}_{j'q} \mathbf{u}) \} \\ &= \sum_{s_q^u \in \mathcal{H}^u} w_q \sum_{s_j^x \in H_j^x} w_{j'} \sum_{s_r^x \in H_r^x} w_r \cdot \text{He} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{P} \cdot \end{aligned} \quad (25)$$

wobei die Substitutionen

$$\bar{\mathbf{A}}_{j'qr} = \mathbf{A}_{j'q} + \mathbf{B}_{j'q} \mathbf{K}_r, \quad (26a)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{j'qr} = \mathbf{a}_{j'q} + \mathbf{B}_{j'q} \mathbf{k}_r \quad (26b)$$

vorgenommen wurden. (25) ist auf  $\mathcal{H}$  erfüllt, falls

$$\text{He} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\bar{\mathbf{A}}_{j'qr} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{a}}_{j'qr}) \} < 0 \quad (27)$$

für alle  $H_{j,q} \in \mathcal{H}$ ,  $\{s_j^x, s_r^x\} \in H_j^x$ ,  $\mathbf{x} \in H_j^x$  gilt. Unter der Annahme, dass auf  $\mathcal{H}_0$  der affine Term  $\mathbf{a}_{j'q}$  identisch  $\mathbf{0}$  ist, folgt aus der Ungleichung

$$\mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_{j'qr} + \bar{\mathbf{A}}_{j'qr}^T \mathbf{P} < 0, \quad (28)$$

dass (27) auf  $\mathcal{H}_0$  gilt. Für  $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$  ist im allgemeinen  $\mathbf{a}_{j'q}$  jedoch von  $\mathbf{0}$  verschieden und muss daher in diesem Gebiet bei der Reglersynthese berücksichtigt werden. Um die auf diesen Hyperquadern zu überprüfende Ungleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_{j'qr} + \bar{\mathbf{A}}_{j'qr}^T \mathbf{P} & * \\ \bar{\mathbf{a}}_{j'qr}^T \mathbf{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

lokal auf  $H_j^x$  zu beschränken, wird dieser Hyperquader zunächst mittels

$$\varepsilon_j(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{x} \left| - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_j^T \mathbf{E}_j & * \\ \mathbf{e}_j^T \mathbf{E}_j & (\mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_j - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right. \right\} \quad (30)$$

approximiert, wobei  $\|\mathbf{E}_j \mathbf{x} + \mathbf{e}_j\| \leq 1$  für alle  $\mathbf{x} \in H_j^x$  gilt. (30) beschreibt dann diejenige Ellipse, sodass  $H_j^x \subseteq \varepsilon_j(\mathbf{x})$ . Alternativ kann eine Ellipse mit minimalem Volumen auch

als eindeutig bestimmtes Löwner-John-Ellipsoids berechnet werden [3].

Mit Hilfe der S-Prozedur [3] gilt dann (29) lokal auf  $H_j^x$ , falls ein  $\lambda_j > 0$  existiert, sodass

$$\begin{bmatrix} -\text{He} \{ \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_{j'qr} \} + \lambda_j \mathbf{E}_j^T \mathbf{E}_j & * \\ -\bar{\mathbf{a}}_{j'qr}^T \mathbf{P} + \lambda_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{E}_j & \lambda_j (\mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_j - 1) \end{bmatrix} > 0. \quad (31)$$

Als weitere Nebenbedingung muss gefordert werden, dass das Einzugsgebiet

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} < 1 \} \quad (32)$$

ganz in  $\mathcal{H}^x$  enthalten ist:

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H}^x = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{v}_i^T \mathbf{x} < 1 \}, \quad (33)$$

wobei mit  $\mathbf{v}_i$  diejenigen Kernpositionen bezeichnet sind, welche das Gebiet  $\mathcal{H}^x$  begrenzen. Nach [3] ist diese Bedingung erfüllt, falls

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i > 0. \quad (34)$$

Mit Hilfe des Schur-Komplements kann diese Forderung als lineare Matrixungleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_i^T & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (35)$$

umgeschrieben werden. Da das Volumen von  $\mathcal{V}$  proportional zu  $\sqrt{\det \mathbf{P}^{-1}}$  ist, kann ferner zur Maximierung des Einzugsgebiets  $\log \det \mathbf{P}^{-1}$  maximiert werden, was gleichbedeutend ist mit der Minimierung von  $\text{spur} \{ \mathbf{P} \}$  [3].

Das gesamte Optimierungsproblem zur Bestimmung stabilisierender Kernpositionsstellgrößen sowie einer Ljapunow-Funktion lautet somit

$$\min \text{spur} \{ \mathbf{P} \}, \quad (36a)$$

$$\mathbf{P} > 0, \quad (36b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_i^T & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad (36c)$$

$$\lambda_j > 0, \quad (36d)$$

$$\forall H_j^x \in \mathcal{H}_0 :$$

$$\mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_{j'qr} + \bar{\mathbf{A}}_{j'qr}^T \mathbf{P} < 0, \quad (36e)$$

$$\forall H_j^x \notin \mathcal{H}_0 :$$

$$\begin{bmatrix} -\text{He} \{ \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_{j'qr} \} + \lambda_j \mathbf{E}_j^T \mathbf{E}_j & * \\ -\bar{\mathbf{a}}_{j'qr}^T \mathbf{P} + \lambda_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{E}_j & \lambda_j (\mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_j - 1) \end{bmatrix} > 0, \quad (36f)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{s}_j^r \leq \mathbf{u}_{\max}. \quad (36g)$$

Hierin wurde auch mit (36g) die Stellgrößenbeschränkung berücksichtigt.

Aufgrund von Produkttermen in  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{s}_j^r$  handelt es sich bei (36) um ein nichtkonvexes Optimierungsproblem, für das bekanntermaßen verschiedene Lösungsstrategien existieren. Ein gängiger Lösungsansatz ist die linearisierende Substitution bilineare Terme durch neue Variablen mit Lösung des konvexen Optimierungsproblems und anschließender Rücksubstitution. Ein anderer Ansatz ist ein iteratives Verfahren (*V-K-Iteration*, *Path-Following*), bei dem jeweils  $\mathbf{P}$  oder  $\mathbf{s}_j^r$  konstant gehalten und das Optimierungsproblem nach der jeweils anderen Variable gelöst wird. (36) kann ebenfalls direkt mittels Solvern für bilineare Matrixungleichungen gelöst werden (siehe z.B. [4]).

Die Stabilitätsbedingungen (36) sind hinreichend, aber nicht notwendig. Die Konservativität der Bedingungen entsteht dabei im wesentlichen durch die Linearisierung des RFS, durch die Verwendung der S-Prozedur sowie die Überprüfung der Stabilitätsbedingungen (36e), (36f) mit allen Kernpositionsstellgrößen und allen linearisierten Subsystemen, welche mit diesen adjazent sind.

Mit Hinblick auf die Anzahl der zu überprüfenden Ungleichungen (36e) und (36f) wurde in [10] für affine Takagi-Sugeno-Systeme eine Reduzierung der LMIs erreicht, indem die Mehrfachsumme in (25) geschickt umgeschrieben wird.

Da das Einzugsgebiet  $\mathcal{V}$  auch deutlich kleiner als  $\mathcal{H}^x$  sein kann, ist eine weitere einfache Erweiterungsmöglichkeit die iterative Vergrößerung des mit (36c) beschränkten Gebiets. Somit würde lediglich die Stabilität auf  $\mathcal{H}_d^x = \{ H_j^x \mid d(H_j^x, \mathbf{0}) \leq d \}$  nachgewiesen, wodurch die Anzahl der Gleichungen in (36) beschränkt werden kann.

## 3.2 Beobachterbasierte Zustandsrückführungen

Sind nicht alle Zustandsgrößen des RFS messbar, so kann die zuvor beschriebene Zustandsrückführung nicht direkt angewendet werden. Aufgrund der nichtlinearen Systemdarstellung in Interpolationsform (8) oder des hybriden Systems (11) kann jedoch bekannterweise ein Luenberger-Beobachter mittels Linearisierung entworfen werden. Dazu werden zunächst System- und Ausgangsfunktion (8) im aktuellen Arbeitspunkt ( $\hat{\mathbf{x}}^*$ ,  $\mathbf{u}^*$ ) von geschätztem Zustand  $\hat{\mathbf{x}}^*$  und bekannter Stellgröße  $\mathbf{u}^*$  linearisiert

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}^*}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}^*}. \quad (37)$$

Anschließend wird ebenfalls online eine Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$  bestimmt, welche zu einer stabilen Dynamik

$$\dot{\mathbf{e}} \approx \Gamma \mathbf{e}, \quad (38a)$$

$$\Gamma = (\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}})) \quad (38b)$$

des Schätzfehlers  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  führt. Nachteilig sind an diesem Vorgehen jedoch der erhöhte Rechenaufwand, welcher durch die Online-Linearisierung sowie die Berechnung einer stabilisierenden Beobachtermatrix entsteht. Zudem ist die Berechnung von (37) bei Verwendung nicht differenzierbarer Zugehörigkeitsfunktionen (3) schwierig. Diese motiviert die Betrachtung der im nächsten Abschnitt diskutierten Ausgangsrückführungen.

## 4 Synthese von Ausgangsrückführungen

Im Bereich der linearen Systemtheorie beschreibt [7] zwei mögliche Strategien zur Auslegung einer Ausgangsrückführung: Zum einen kann sie derart ausgelegt werden, dass sie eine Zustandsrückführung möglichst gut approximiert. Zum anderen kann die Synthesestrategie für Zustandsrückführungen derart erweitert werden, dass lediglich messbare Größen zur Regelung berücksichtigt werden und so strukturelle Beschränkungen schon in die Reglerauslegung einfließen. Wie im Folgenden gezeigt wird, können diese Ansätze auch für Ausgangsrückführungen für RFS angewendet werden.

### 4.1 Synthese von Ausgangsrückführungen unter Berücksichtigung struktureller Beschränkungen

In einem ersten Ansatz wird eine Ausgangsrückführung durch explizite Berücksichtigung der strukturellen Beschränkung in Folge der Ausgangsfunktion (8b) entworfen. Im Fall der Zustandsrückführung in Kapitel 3 wurde eine spezifische Kernpositionsstellgröße  $\mathbf{u} = \mathbf{s}_j^r$  für jede Kernposition  $\mathbf{s}_j^x$  bestimmt. Es wurde dann angenommen, dass  $\mathbf{u} = \mathbf{s}_j^r$  nur dann gilt, wenn  $\mathbf{x} = \mathbf{s}_j^x$ . Im Fall einer allgemeinen Ausgangsfunktion  $\mathbf{g} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  ist diese direkte Abhängigkeit nicht mehr gegeben. Daher ist nun das Ziel, konstante Stellgrößen  $\mathbf{s}_t^k$  für jede Kernposition  $\mathbf{s}_t^y$  im Bild der Ausgangsfunktion zu bestimmen, so dass weiterhin (25) für alle Zustände des Einzugsgebiets erfüllt ist. Dazu wird zunächst die Ausgangsfunktion (8b) für jeden Hyperquader  $H_j^x$  als

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_j^y \Delta_n \Omega_j \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \quad (39)$$

notiert und mit  $H_t^y = \text{conv} \{ \mathbf{s}_j^y \}$  diejenige Untermannigfaltigkeit im Bild von  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  bezeichnet, in dem alle  $\mathbf{y}$  für  $\mathbf{x} \in H_j^x$  liegen. Als Ausgangsrückführung wird nun

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{y}) = \sum_t \mathbf{s}_t^k \prod_{i=1}^r \mu_{t_i}^{y_i}(\mathbf{y}_i) \quad (40)$$

angesetzt, mit Kernpositionsstellgrößen  $\mathbf{s}_t^k$  für jede Kernposition  $\mathbf{s}_t^y$ . Analog zur Zustandsrückführung wird nun mit Hilfe des Vektors  $\mathbf{S}_t^k = [\mathbf{s}_t^k, \dots, \mathbf{s}_{t+1}^k]$ , welcher alle Kernpositionsstellgrößen auf  $H_t^y$  beinhaltet, diese Ausgangsrückführung als

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{y}) &= \mathbf{S}_t^k \Delta_r \Omega_t \mathbf{Z}(\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{S}_t^k \Delta_r \Omega_t \mathbf{Z}(\mathbf{S}_j^y \Delta_n \Omega_j \mathbf{Z}(\mathbf{x})) \\ &= \sum_{j'} w_{j'}(\mathbf{x}) (\mathbf{K}_{j'} \mathbf{x} + \mathbf{k}_{j'}) \end{aligned} \quad (41)$$

umgeschrieben, wobei

$$\mathbf{K}_{j'} = \mathbf{S}_t^k \Delta_r \Omega_t \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{S}_j^y \Delta_n \Omega_j \mathbf{Z}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{s}_j^x}, \quad (42a)$$

$$\mathbf{k}_{j'} = \mathbf{S}_t^k \Delta_r \Omega_t \mathbf{Z}(\mathbf{S}_j^y \Delta_n \Omega_j \mathbf{Z}(\mathbf{s}_j^x)) - \mathbf{K}_{j'} \mathbf{s}_j^x. \quad (42b)$$

Mit Hilfe dieser Linearisierung führt nun das Lösen des Optimierungsproblems (36) unter Berücksichtigung von (42) zur Bestimmung stabilisierender Kernpositionsstellgrößen  $\mathbf{s}_t^k$  sowie einer Ljapunow-Funktion  $V(\mathbf{x})$ .

Gegenüber einer beobachterbasierten Zustandsrückführung bietet dieser Ansatz den Vorteil eines deutlich kleineren Rechenaufwands zur Laufzeit. Andererseits stehen zur Lösung des Optimierungsproblems aufgrund der strukturellen Beschränkung weniger Freiheitsgrade zur Verfügung als bei der Zustandsrückführung.

### 4.2 Synthese von Ausgangsrückführung durch Approximation einer Zustandsrückführung

In einem zweiten Ansatz wird eine Ausgangsrückführung  $\mathbf{k}(\mathbf{y})$  durch Approximation einer Zustandsrückführung  $\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x})$  berechnet. Das Ziel ist es nun, die unbekanntenen Kernpositionsstellgrößen  $\mathbf{s}_t^k$  so zu bestimmen, dass

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_j \mathbf{s}_j^r \cdot w_j(\mathbf{x}) \stackrel{!}{\approx} \mathbf{k}(\mathbf{y}) = \sum_t \mathbf{s}_t^k \cdot w_t(\mathbf{y}), \quad (43)$$

wobei erneut die Prämisse mit  $w_j(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \mu_{j_i}^{x_i}(x_i)$  abgekürzt wurde. Für die Ausgangsrückführung  $\mathbf{k}(\mathbf{y})$  mit Un-

bekanntes  $\mathbf{s}_t^k$  folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{y}) &= \sum_t \mathbf{s}_t^k \cdot w_t(\mathbf{y}) = \sum_t \mathbf{s}_t^k \cdot w_t(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &= \sum_t \mathbf{s}_t^k \cdot w_t \left( \sum_j \mathbf{s}_j^y \cdot w_j(\mathbf{x}) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Darin sind die  $w_t(\mathbf{x})$  genau dann konstant, wenn  $\mathbf{x}$  konstant ist. Da  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  für Kernpositionen  $\mathbf{s}_j^x$  im Zustandsraum ausgelegt wurde, ist es sinnvoll, die Zustandsrückführung an diesen Stellen zu approximieren:

$$\mathbf{k}(\mathbf{s}_j^x) \approx \mathbf{r}(\mathbf{s}_j^x), \quad \forall \mathbf{s}_j^x \in \mathcal{X}. \quad (45)$$

Zusammen mit den  $N_k$  Unbekannten  $\mathbf{S}_k = [\mathbf{s}_1^k, \dots, \mathbf{s}_{N_k}^k]^T$  der Ausgangsrückführung ergeben sich aus (45) für  $\mathbf{r}(\mathbf{s}_j^x)$  Gleichungen der Form

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{s}_j^x) \cdot \mathbf{S}_k = \mathbf{r}(\mathbf{s}_j^x). \quad (46)$$

Darin bezeichnet

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{s}_j^x) = [w_1(\mathbf{s}_j^x), \dots, w_{N_k}(\mathbf{s}_j^x)] \otimes \mathbf{I}_n \quad (47)$$

eine  $n \times N_k$ -Matrix, welche alle Prämissen der  $N_k$  Kernpositionen  $\mathbf{s}_j^k$  der Ausgangsrückführung enthält.

Da  $\mathbf{W}^T(\mathbf{s}_j^x)$  ausschließlich Prämissen an Kernpositionen enthält, sind ihre Elemente entweder 0 oder 1. Durch Aggregation aller  $N_r = N_x$  Kernpositionen der Zustandsrückführung  $\mathbf{s}_j^r$  in einem Vektor  $\mathbf{S}_r = [\mathbf{s}_1^r, \dots, \mathbf{s}_{N_r}^r]^T$  kann (46) in kompakter Form als lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{S}_k = \mathbf{S}_r \quad (48)$$

notiert werden, mit  $\mathbf{Y} \in \{0, 1\}^{(n \cdot N_r) \times N_k}$  und

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{W}(\mathbf{s}_1^x) \quad \dots \quad \mathbf{W}(\mathbf{s}_{N_x}^x)]^T. \quad (49)$$

Für  $\dim \mathbf{y} < \dim \mathbf{x}$  gilt  $N_k < N_r$ , sodass (48) im allgemeinen überbestimmt ist. Eine Lösung ist z.B. mit Least-squares-Verfahren möglich. Dann ist

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{Y}^+ \mathbf{S}_r = (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{S}_r \quad (50)$$

eine Lösung für die gesuchten Kernpositionsstellgrößen  $\mathbf{s}_t^k$  der Ausgangsrückführung, wobei  $\mathbf{Y}^+$  die Moore-Penrose-Pseudoinverse bezeichnet. Die Lösung minimiert dabei den quadratischen Fehler der Summe der Residuen:

$$\min_{\mathbf{s}_t^k} \|\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{S}_k - \mathbf{S}_r\|_2^2. \quad (51)$$

Für Konditionszahlen  $\text{cond}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})$ , welche nicht deutlich größer als 1 sind, ist die Lösung  $\mathbf{S}_k$  robust gegenüber numerischen Problemen. Ansonsten empfehlen sich eher numerische Verfahren basierend auf der QR-Zerlegung, wie z.B. die Householder-Transformation.

## 5 Simulationsergebnisse

Im Folgenden werden die diskutierten Syntheseansätze für Zustands- und Ausgangsrückführungen am Beispiel des Van-der-Pol-Oszillators

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u \end{bmatrix}, \quad (52a)$$

$$y = x_2 \quad (52b)$$

verdeutlicht. Dieser wird zunächst als rekurrentes Fuzzy-System mit Kernpositionen bei  $\{\mathbf{s}_{j_1}^{x_1}\} = \{\mathbf{s}_{j_2}^{x_2}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  modelliert, welche mit linguistischen Werten  $\{L_{j_1}^{x_1}\} = \{L_{j_2}^{x_2}\} = \{\text{neg. groß, neg. klein, null, pos. klein, pos. groß}\}$  korrespondieren. Die Kernpositionen in  $\mathcal{U}$  befinden sich bei  $\{\mathbf{s}_q^u\} = \{-10, 0, 10\}$  und sind mit den linguistischen Werten  $\{L_q^u\} = \{\text{negativ, null, positiv}\}$  assoziiert. Die Kernpositionsgradienten werden auf die Mengen

$$\mathbf{s}_{j_1}^{x_1} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad (53a)$$

$$\mathbf{s}_{j_2}^{x_2} \in \{0, \pm 1, \pm 4, \pm 8, \pm 12\} \quad (53b)$$

beschränkt, welche mit den linguistischen Werten

$$L_{j_1}^{x_1} = \{\text{null, neg./pos. klein/mittel/groß}\} \quad (54a)$$

$$L_{j_2}^{x_2} = \{\text{null, neg./pos. klein/mittel/groß/sehr groß}\} \quad (54b)$$

korrespondieren. Die Wahl der Kernpositionen und -gradienten erfolgte dabei derart, dass das dynamische Verhalten des Oszillators qualitativ gut nachgebildet wird. Damit ergibt sich für  $u = \text{null}$  ein Teil der Regelbasis, welchen Tabelle 1 zeigt. Tabelle 2 gibt zudem die Regelbasis der Ausgangsfunktion wieder. Die Systemgleichungen (52) sind bei der Modellierung in der Regel unbekannt, dienen hier aber als Referenzmodell, an dem die Regelungen später simuliert werden.

Ein Phasenportrait des unregulierten RFS zeigt Abbildung 5, aus dem hervorgeht, dass die Ruhelage bei  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$

**Tabelle 1:** Regelbasis des unregulierten Systems.

	$L_w^x$	$L_{j_1}^{x_1}$				
		ng	nk	n	pk	pg
$L_{j_2}^{x_2}$	pg	pg/nm	pg/pk	pg/pk	pg/nk	pg/ng
	pk	pk/nk	pk/pk	pk/pk	pk/nk	pk/nm
	n	n/pk	n/pk	n/n	n/nk	n/nk
	nk	nk/pm	nk/pk	nk/nk	nk/nk	nk/pk
	ng	ng/pg	ng/pk	ng/nk	ng/nk	ng/pm

Tabelle 2: Regelbasis der Ausgangsfunktion.

$L_{l_1}^y$	$L_{j_2}^{x_2}$				
	ng	nk	n	pk	pg
	ng	nk	n	pk	pg

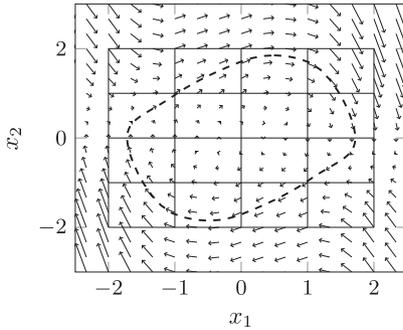


Abbildung 5: Phasenportrait des unregulierten RFS mit Grenzzyklus.

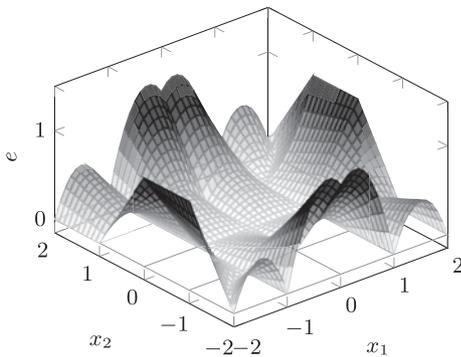


Abbildung 6: Absoluter Approximationsfehler des RFS.

instabil ist. Zu erkennen ist ebenfalls der (stabile) Grenzzyklus. Dass es sich bei dem RFS um ein approximatives Modell handelt, geht aus Abbildung 6 hervor, welches den Approximationsfehler  $e = \|\dot{\mathbf{x}}_{\text{RFS}} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{GT}}\|_2$  zeigt. Offensichtlich ist die Approximation an den Kernposition am genauesten, während insbesondere an den Rändern des Definitionsgebiets der Fehler ansteigt. Aufgrund der Beschränkung der Kernpositionsgradienten auf eine diskrete Menge (53) ist der Fehler jedoch auch in den Kernpositionen in der Regel von Null verschieden. Wird insbesondere für die Kernpositionsgradienten der gesamte  $\mathbb{R}^n$  zugelassen, kann eine wesentlich bessere Approximation erreicht werden. In diesem Fall ist eine direkte linguistische Interpretation der Regeln jedoch nicht mehr möglich.

Ausgehend von der Regelbasis des RFS wird zunächst anhand von (36) eine stabilisierende Zustandsrückführung für den Oszillator bestimmt. Die Berechnungen sowie Simulationen wurden dabei in MATLAB/SIMULINK durch-

Tabelle 3: Kernpositionsstellgrößen der Zustandsrückführung.

$u = s_j^r$	$L_{j_1}^{x_1}$				
	nb	ns	n	ps	pb
pg	1,147	-5,923	-6,893	-6,128	0,831
pk	-5,658	-9,03	-10,000	-9,235	-7,079
$L_{j_1}^{x_1}$ n	1,282	-0,157	0	0,157	-1,282
nk	7,079	9,235	10,000	9,183	5,810
ng	-0,906	5,953	6,608	5,791	0,783

geführt. Zusätzlich wurde zur Lösung der bilinearen Matrixungleichungen das Framework YALMIP [11] sowie der frei verfügbare Solver PENLAB [4] verwendet.

Als Ergebnis wurde der in Tabelle 3 dokumentierte Fuzzy-Regler berechnet, für den crisper Werte zugelassen wurden. Eine Wertediskretisierung kann hierbei nachträglich erfolgen, was jedoch eine Neuberechnung der damit erreichten Stabilitätsregion nötig machen würde. Für die Ljapunow-Matrix ergab sich

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,00 \\ 0,00 & 0,25 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Das daraus resultierende maximale Einzugsgebiet (32) ist zusammen mit einem Phasenportrait des geschlossenen Regelkreises in Abbildung 7 dargestellt. Für eine Auslenkung von  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 1]^T$  zeigt Abbildung 8 zudem den Verlauf der Zustände sowie der Stellgröße, welche beide asymptotisch konvergieren. Offensichtlich wird die Stellgrößenbeschränkung von  $-10 \leq u \leq 10$  stets eingehalten.

Unter der Berücksichtigung, dass lediglich die Zustandsgröße  $x_2$  messbar ist, zeigt Abbildung 9 den Verlauf der Zustände sowie der Stellgröße bei Verwendung eines Beobachters. Aufgrund des anfänglichen Schätzfehlers kommt es im Gegensatz zur Zustandsrückführung zu einem stärkeren Über-/Unterschwingen der Zustände,

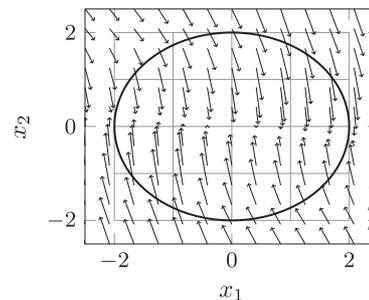


Abbildung 7: Phasenportrait des Van-der-Pol-Oszillators bei vollständiger Zustandsrückführung sowie Einzugsgebiet der Ruhelage.

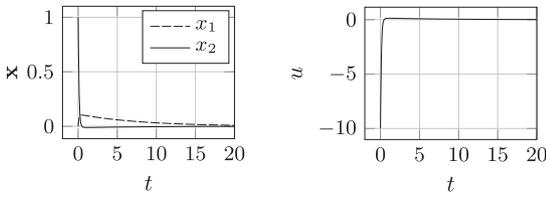


Abbildung 8: Zustands- und Stellgrößenverlauf für  $x_0 = [0 \ 1]^T$  bei vollständiger Zustandsrückführung.

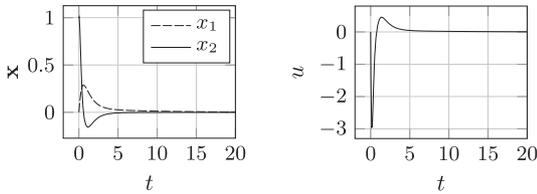


Abbildung 9: Zustands- und Stellgrößenverlauf für  $x_0 = [0 \ 1]^T$  bei beobachterbasierter Zustandsrückführung.

Tabelle 4: Kernpositionsstellgrößen für approximierende Ausgangsrückführung.

	$L_t^y$				
	ng	nk	n	pk	pg
$L_t^k$	3,646	8,261	0,000	-8,200	-3,393

welche aber ebenfalls nach ca. 7 Sekunden in die Ruhelage konvergiert sind.

Durch die in Abschnitt 4.2 beschriebene Approximation der Zustandsrückführung wurde eine erste Ausgangsrückführung berechnet, welche Tabelle 4 wiedergibt. Dem Zustandsverlauf, welchen Abbildung 10 (links) zeigt, kann entnommen werden, dass auch diese Ausgangsrückführung ein Stabilisierung der Ruhelage erreicht. Durch die Approximation ist die stationäre Genauigkeit im allgemeinen jedoch nicht mehr gewährleistet, sodass im Fall einer bleibenden Regelabweichung ein weiterer äußerer Regler notwendig werden kann.

Dem entgegen steht jedoch die in Abschnitt 4.1 beschriebene Ausgangsrückführung, welche die strukturelle Beschränkung durch die Ausgangsfunktion direkt in der Synthese berücksichtigt. Hierbei konnte lediglich ein deutlich kleineres Einzugsgebiet stabilisiert werden, welches in  $\mathcal{H}_0$  liegt und in Abbildung 11 zu erkennen ist. Das Einzugsgebiet wird dabei durch (32) mit

$$P = \begin{bmatrix} 1,011 & 0,109 \\ 0,109 & 1,075 \end{bmatrix} \quad (56)$$

beschrieben. Die entsprechende Ausgangsrückführung für dieses Gebiet zeigt Tabelle 5. Der Grund für dieses deut-

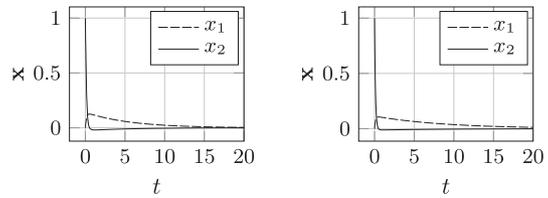


Abbildung 10: Simulationsergebnisse für Zustandsgrößen mit  $x_0 = [0 \ 1]^T$  bei Ausgangsrückführung der Approximation (links) und Ausgangsrückführung mittels direkter Synthese (rechts).

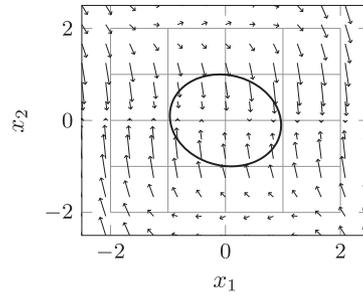


Abbildung 11: Phasenportrait bei Zustandsrückführung (direkte Synthese) sowie Einzugsgebiet der Ruhelage.

Tabelle 5: Kernpositionsstellgrößen für Ausgangsrückführung (direkte Synthese).

	$L_t^y$				
	ng	nk	n	pk	pg
$L_t^k$	-	10	0	-10	-

lich verkleinerte Einzugsgebiet ist in der zunehmenden Komplexität und Konservativität des zu lösenden Optimierungsproblems (36) zu sehen.

## 6 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurden Synthesemethoden von Zustands- und Ausgangsrückführungen für rekurrente Fuzzy-Systeme präsentiert. Ähnlich wie beim Ansatz der *parallel distributed compensation* für Takagi-Sugeno-Fuzzy-Systeme basieren die vorgestellten Ansätze auf der Idee, jeder Kernposition des Zustands- bzw. Ausgangsraums je eine konstante Stellgröße zuzuordnen, zwischen denen dann in Abhängigkeit vom Zustand oder der Messgröße interpoliert wird.

Der Vorteil des sich so ergebenden Fuzzy-Reglers liegt sicherlich in seiner relativ einfachen Implementierbarkeit sowie der Möglichkeit der linguistischen Interpretierbarkeit. Diese kann dabei mit der gleichen Terminologie wie jene des rekurrente Fuzzy-Systeme erfolgen. Die Metho-

de zur Zustandsrückführung wurde zudem auf Ausgangsrückführungen erweitert. Hierbei zeigte sich, dass Methoden zur Synthese von Ausgangsrückführungen, welche aus der linearen Systemtheorie bekannt sind, auch auf rekurrente Fuzzy-Systeme übertragbar sind.

Als nachteilig ist sicher zu bewerten, dass die formulierten hinreichenden Stabilitätsbedingungen in Form bilinearer Matrixungleichungen mit zunehmender Größe der Regelbasis schnell restriktiv werden, sodass insbesondere bei der direkten Berücksichtigung der Ausgangsfunktion zur Synthese einer Ausgangsrückführung mitunter nur stabilisierende Kernpositionsstellgrößen für ein kleines Einzugsgebiet berechnet werden können. Zudem wurden bislang Systeme niedriger Ordnung betrachtet, für die der Bezug zu einer linguistischen Beschreibung sinnvoll erscheint. In höherdimensionalen Systemen können die betrachteten Syntheseverfahren zwar immer noch angewendet werden, hier gilt es aber die mit der Dimension exponentiell wachsende Regelbasis zu berücksichtigen, die sich auf das zu lösende Optimierungsproblem auswirkt.

Eine Erweiterung des vorgeschlagenen Konzepts auf allgemeinere Gain-Scheduling-Regler ist denkbar, was aufgrund der größeren Freiheitsgrade zudem eine bessere Regelgüte verspricht. Dies würde jedoch einerseits die linguistische Interpretierbarkeit des Reglers mindern als auch andererseits den Implementierungsaufwand erhöhen.

Bislang unberücksichtigt geblieben sind die Auswirkungen von Modellierungsfehlern auf die erreichbare Regelgüte, sodass der Fokus weiterer Arbeiten auf möglichst robusten Regelungen liegen kann. Zudem wurden in dieser Arbeit lediglich die Stabilisierung einzelner Ruhelagen betrachtet, wobei sich die Frage der Erweiterbarkeit auf Folgeregelungen stellt. Schließlich wurde das rekurrente Fuzzy-Systeme als mit vollständiger Regelbasis gegeben angenommen. Hier stellt sich die Frage der Erweiterbarkeit des präsentierten Ansatzes auf unvollständig spezifizierte rekurrente Fuzzy-Systeme sowie rekurrente Fuzzy-Systeme mit allgemeineren Partitionierungen des Eingangs-Zustandsraums.

**Danksagung:** Diese Arbeit wurde gefördert durch die Deutsche Telekom Stiftung ([www.telekom-stiftung.de](http://www.telekom-stiftung.de)) und die Studienstiftung des Deutschen Volkes ([www.studienstiftung.de](http://www.studienstiftung.de)).

## Literatur

1. ADAMY, J. und A. FLEMMING: *Equilibria of continuous-time recurrent fuzzy systems*. Fuzzy Sets and Systems, 157(22):2913–2933, 2006.
2. ADAMY, J. und R. KEMPF: *Regularity and chaos in recurrent fuzzy systems*. Fuzzy Sets and Systems, 140(2):259–284, 2003.
3. BOYD, S., L. E. GHAOUI, E. FERON und V. BALAKRISHNAN: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, 1994.
4. FIALA, J., M. KOČVARA und M. STINGL: *PENLAB: A MATLAB solver for nonlinear semidefinite optimization*. arXiv preprint arXiv:1311.5240, 2013.
5. FLEMMING, A.: *Zeitkontinuierliche rekurrente Fuzzy-Systeme*. Doktorarbeit, Technische Universität Darmstadt, 2008.
6. FLIESS, M. und C. JOIN: *Model-free control*. International Journal of Control, 86(12):2228–2252, 2013.
7. FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig, 1990.
8. GERING, S. und J. ADAMY: *Synthesis of Local State Feedback for Continuous-Time Recurrent Fuzzy Systems*. In: *Proc. of the IEEE Intern. Conf. on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Hyderabad, India, 2013.
9. KEMPF, R. und J. ADAMY: *Equilibria of recurrent fuzzy systems*. Fuzzy Sets and Systems, 140(2):231–257, 2003.
10. KIM, E. und S. KIM: *Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy control system via LMI and ILMI: a continuous case*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10(3):391–400, June 2002.
11. LÖFBERG, J.: *YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*. In: *Proceedings of the CACSD Conference*, S. 284–289, 2004.
12. PEDRYCZ, W.: *Why triangular membership functions?*. Fuzzy sets and Systems, 64(1):21–30, 1994.
13. SCHWUNG, A., T. GUSSNER und J. ADAMY: *Stability analysis of continuous-time recurrent fuzzy systems*. In: *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, S. 313–318, Jeju (Korea), August 2009.
14. TAKAGI, T. und M. SUGENO: *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*. IEEE Transactions on Systems, Man And Cybernetics, 15(1):116–132, 1985.
15. TANAKA, K., T. IKEDA und H. WANG: *Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 6(2):250–265, Mai 1998.
16. ZHANG, J. und A. MORRIS: *Recurrent neuro-fuzzy networks for nonlinear process modeling*. Neural Networks, IEEE Transactions on, 10(2):313–326, mar 1999.



**Dipl.-Ing. Stefan Gering**  
Technische Universität Darmstadt,  
Fachgebiet Regelungsmethoden und  
Robotik, Landgraf-Georg-Straße 4, 64283  
Darmstadt  
[sgering@rmr.tu-darmstadt.de](mailto:sgering@rmr.tu-darmstadt.de)

Dipl.-Ing. Stefan Gering ist seit 2012 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungsmethoden und Robotik des Instituts für Automatisierungstechnik der TU Darmstadt. Sein Forschungsschwerpunkt ist die Regelung rekurrenter Fuzzy-Systeme.



**Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy**  
Technische Universität Darmstadt,  
Fachgebiet Regelungsmethoden und  
Robotik, Landgraf-Georg-Straße 4, 64283  
Darmstadt  
[jadamy@rmr.tu-darmstadt.de](mailto:jadamy@rmr.tu-darmstadt.de)

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy ist Leiter des Fachgebiets Regelungsmethoden und Robotik am Institut für Automatisierungstechnik der TU Darmstadt. Seine Hauptarbeitsgebiete sind Regelungsmethoden für nichtlineare Systeme, Computational Intelligence sowie autonome mobile Roboter.

Verfügbar unter  
lediglich die vom Gesetz vorgesehenen Nutzungsrechte gemäß UrhG