

Ein prädiktiver Ansatz zur Lösung nichtlinearer Pfadverfolgungsprobleme unter Beschränkungen

A Predictive Solution to Nonlinear Path-Following Problems Subject to Constraints

Timm Faulwasser, Rolf Findeisen, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Zusammenfassung Neben Trajektorienfolgeproblemen und der Stabilisierung von Arbeitspunkten gibt es viele Regelungsprobleme, bei denen die präzise Verfolgung einer vorgegebenen, geometrischen Bahn im Zustandsraum wichtiger ist als die Konvergenz gegen eine zeitabhängige Solltrajektorie. Beispiele hierfür sind Messaufgaben, die Regelung der Fräskopfbahn von Werkzeugmaschinen oder die Koordination von Satelliten für Vermessungsaufgaben. Diese Probleme der Verfolgung geometrischer Referenzkurven im Zustandsraum werden auch als Pfadverfolgungsprobleme bezeichnet. In diesem Beitrag wird ein optimierungsbasierter prädiktiver Ansatz zur Lösung des Pfadverfolgungsproblems für nichtlineare Systeme unter Beschränkungen der Stell- und Zustandsgrößen vorgestellt. Basierend auf der Erweiterung eines geeigneten Optimalsteuer-

ungsproblems werden hinreichende Stabilitätsbedingungen für das vorgeschlagene Regelungskonzept gefunden. Daneben wird ein Ansatz zur Lösung des um zusätzliche örtliche Freiheitsgrade erweiterten Pfadverfolgungsproblems diskutiert. Die Anwendung der vorgestellten Methoden wird am Beispiel eines Fahrzeugs erläutert. ▶▶▶ **Summary** A model predictive control scheme to solve path-following problems for nonlinear systems subject to input and state constraints is proposed. Sufficient conditions which guarantee the stability of the proposed scheme are derived. Furthermore, it is discussed how additional degrees of freedom in the path description can be formulated in an extended path-following setup. The presented schemes are exemplified by simulations of a vehicle.

Schlagwörter Pfadverfolgung, Trajektorienfolge, nichtlineare Systeme, prädiktive Regelung, Beschränkungen ▶▶▶
Keywords Path-following, trajectory tracking, nonlinear systems, model predictive control, constraints

1 Einleitung

Sowohl die Stabilisierung stationärer Arbeitspunkte als auch der Entwurf von Folgeregungen sind wichtige regelungstechnische Herausforderungen. Während bei der Arbeitspunktstabilisierung im Allgemeinen von einem konstanten Sollwert ausgegangen wird, ist das Ziel einer Folgeregung, dass die Regelgröße einem zeitlich veränderlichen Sollwert folgt. Diese Aufgabe umfasst mehrere

Problemstellungen: Wechsel zwischen verschiedenen stationären Arbeitspunkten, Verfolgung von Solltrajektorien und Probleme der Pfadverfolgung.

Probleme der Verfolgung zeitabhängiger Referenzsignale, sogenannte Trajektorienfolgeprobleme, treten oft bei der Regelung von zyklischen Problemen in der Robotik oder bei Synchronisationsaufgaben auf. Insbesondere die Verfolgung zeitlich bekannter, vorweg berechneter

(optimaler) Trajektorien eines Systems ist in vielen Bereichen von großer praktischer Bedeutung, u. a. beim Betrieb von verfahrenstechnischen Anlagen, wie der Führung von Batchreaktoren zur Polymerisation.

Im Gegensatz dazu zielt die Pfadverfolgung nicht auf die Verfolgung einer direkt zeitabhängigen Trajektorie, sondern auf die Verfolgung einer parametrisierten Kurve im Zustandsraum – also einer geometrischen Referenz. Pfadverfolgung ist von vielfältiger praktischer Bedeutung. So ist für die Steuerung von Werkzeugmaschinen das präzise Abfahren einer vorgegebenen Bahn oftmals erheblich wichtiger als die Einhaltung einer gewissen Bahngeschwindigkeit. Fehler beim Abfahren des Pfades führen unmittelbar dazu, dass das bearbeitete Bauteil nicht mehr weiterverwendet werden kann, während eine geringere Abfahrsgeschwindigkeit toleriert werden kann. Ähnliche Aufgaben entstehen bei der Kursfolge von Schiffen oder Flugzeugen beispielsweise für Vermessungs- oder Kabellegeaufgaben, welche sich als Pfadverfolgungsproblem formulieren lassen [4; 15]. Doch nicht nur für mechatronische Systeme ist diese Problemstellung von Bedeutung, auch die Regelung von Kristallisationsprozessen kann als Pfadverfolgungsproblem im Phasenraum aufgefasst werden [14], bei dem der Prozess in einem bestimmten Bereich des Phasenraums geführt bzw. gehalten werden muss. Existierende Verfahren zur Pfadverfolgung erlauben oft nicht die Berücksichtigung von Beschränkungen der Stell- oder Zustandsgrößen [1; 4; 15], diese spielen jedoch in der Praxis häufig eine wichtige Rolle.

Optimierungsbasierte prädiktive Verfahren erlauben die Berücksichtigung von Beschränkungen der Stell- und Zustandsgrößen im Rahmen eines strukturierten Reglerentwurfs [7; 9; 11]. Ferner kann die nichtlineare prädiktive Regelung (*engl.: nonlinear model predictive control*) auf Trajektorienfolgeprobleme angewendet werden, siehe zum Beispiel [12]. Es stellt sich daher die Frage, ob prädiktive Regelungsverfahren auch zur Lösung von Pfadverfolgungsproblemen, d. h. zur Verfolgung parametrisierter Referenzkurven im Zustandsraum unter Beschränkungen, geeignet sind.

Die Verwendung parametrisierter Referenzkurven im Kontext optimierungsbasierter, prädiktiver Regelungsverfahren bedeutet, die zeitliche Veränderung der Referenz so zu bestimmen, dass die Strecke der Änderung der Referenz möglichst gut folgen kann. Diese Idee ist verwandt mit dem Ansatz der Sollwertvorgabe durch einen sogenannten Referenzgouverneur (*engl. reference governor*). Unter anderem wird dies für optimierungsbasierte Regelungsverfahren in [2] skizziert. Dabei wird im Allgemeinen auf eine Kaskade aus einem inneren Regelkreis – der Beschränkungen der Stell- und Zustandsgrößen respektiert – und einem äußeren Regelkreis für die Sollwertvorgabe zurückgegriffen. Ein anderer Ansatz [10] verwendet eine Parametrisierung der Menge erreichbarer Arbeitspunkte im Kontext prädiktiver Regelung für zeitdiskrete Systeme. Ziel ist es dabei, die Güte des Wechsels zwischen stationären Arbeitspunkten durch pa-

rameterabhängige Referenzterme im Kostenfunktional zu verbessern.

In dieser Arbeit wird ein prädiktiver Ansatz zur Lösung des Pfadverfolgungsproblems skizziert, der Beschränkungen berücksichtigt und dessen Stabilität garantiert werden kann. Im Unterschied zur Idee des Referenzgouverneurs (vgl. [2]) kommt der vorzustellende prädiktive Ansatz ohne die Verwendung einer Kaskadenstruktur aus.

In Abschnitt 2 werden die Unterschiede zwischen Trajektorienfolge und Pfadverfolgung herausgearbeitet und es wird das betrachtete Pfadverfolgungsproblem definiert. In Abschnitt 3 wird ein prädiktiver Ansatz zur Lösung des nichtlinearen eindimensionalen Pfadverfolgungsproblems vorgestellt. Es werden hinreichende Bedingungen für die Stabilität des Ansatzes diskutiert. Daneben wird aufgezeigt, wie die Wahl stabilisierender Endregionen und Endbestrafungen durch die zusätzlichen Freiheitsgrade des Pfadverfolgungsproblems vereinfacht wird. Die prädiktive Lösung des Pfadverfolgungsproblems für ein Fahrzeug steht im Mittelpunkt des Abschnitts 4. Die Erweiterung der vorgestellten Ergebnisse auf mehrdimensionale Pfadkorridore ist Gegenstand von Abschnitt 5. Mit einer Zusammenfassung in Abschnitt 6 schließt dieser Beitrag.

2 Trajektorienfolge und Pfadverfolgung

Betrachtet werden nichtlineare Systeme der Form

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2)$$

unter Beschränkungen der Stell- und Zustandssignale. Hierbei ist x der Systemzustand und u der Eingang. Sowohl der Eingang als auch der Zustand unterliegen Begrenzungen. D. h. der Systemzustand soll, zum Beispiel aufgrund von Sicherheits- oder Qualitätsgründen auf die Menge $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt sein und die Stellgrößen unterliegen Begrenzungen der Form $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$. Im Folgenden wird zwischen der sogenannten Arbeitspunktstabilisierung, dem Trajektorienfolgeproblem sowie dem Problem der Pfadverfolgung unterschieden.

Arbeitspunktstabilisierung

Ziel einer Arbeitspunktstabilisierung ist es, eine Rückführung bzw. einen Regler zu finden, sodass der Systemzustand unter Einhaltung der Beschränkungen zum vorgegebenen Arbeitspunkt konvergiert und dieser – zum Beispiel im Sinne von Lyapunov – stabilisiert wird.

Trajektorienfolge

Der Entwurf einer Regelung zur Trajektorienfolge hat hingegen das Ziel, dass die Systemzustände $x(t)$ gegen eine Referenztrajektorie $r(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvergieren und diese Trajektorie stabilisieren. Beispiele für Trajektorienfolgeprobleme sind Synchronisationsaufgaben in der Kommunikation oder auch das zeitliche Verfolgen eines Rezepts in einem chemischen Batchprozess.

Oftmals wird der Entwurf von Regelungen zur Trajektorienfolge auf das Problem der Stabilisierung eines Arbeitspunktes zurückgeführt. Im ersten Schritt wird hierzu der Trajektorienfolgefehler $e_T(t)$ definiert

$$e_T(t) = x(t) - r(t). \tag{3}$$

Unter der Annahme, dass die Referenztrajektorie $r(t)$ durch ein bekanntes Exosystem $\dot{r} = h(r)$ generiert wird, kann das Trajektorienfolgeproblem in Fehlerkoordinaten beschrieben werden: $\lim_{t \rightarrow \infty} e_T(t) = 0$.

Pfadverfolgung

Ziel der Pfadverfolgung ist es, nicht einer zeitabhängigen Referenztrajektorie, sondern einer geometrischen Referenz im Zustandsraum bzw. einer Teilmenge des Zustandsraums zu folgen, siehe Bild 1. Beispiele hierfür sind Fräs- und Bearbeitungsvorgänge bei Werkzeugmaschinen oder hochgenaue Messvorgänge, bei denen der Fräs- oder Messkopf exakt einer Kontur folgen soll.

Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die Referenz im Zustandsraum durch eine Kurve gegeben ist. Diese Kurve

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$$

$$\mathcal{R} = \{r(\theta) \in \mathbb{R}^n : \theta \in [\hat{\theta}, 0] \subset \mathbb{R} \mapsto r(\theta)\} \tag{4}$$

wird im Folgenden als *Pfad* bezeichnet. Insbesondere wird hierbei, ohne erhebliche Einschränkung der Allgemeinheit, davon ausgegangen, dass der Pfad \mathcal{R} als Bild des reellen Intervalls $[\hat{\theta}, 0]$ unter der Abbildung $r : \theta \in [\hat{\theta}, 0] \mapsto r(\theta) \in \mathbb{R}^n$ gegeben und die Bewegungsrichtung durch das positive Voranschreiten in θ vorgegeben ist. Somit ist der Pfad in Bezug auf den Pfadparameter negativ parametrisiert und soll im Ursprung $r(\theta = 0) = 0$ enden. Außerdem wird angenommen, dass r eine bijektive und hinreichend oft stetig differenzierbare Abbildung ist, was insbesondere impliziert, dass der Pfad sich nicht selbst kreuzt. Im Folgenden wird ein Pfad als abstandsregulär in der Menge \mathcal{X} bezeichnet, wenn zu jedem Zustand $x \in \mathcal{X}$ genau ein Pfadparameter θ existiert, sodass $\theta = \operatorname{argmin}_{\theta} \|x - r(\theta)\|$.

Mit Hilfe der Pfadbeschreibung (4) lässt sich ein zeitlicher Pfadverfolgungsfehler $e_p(t)$ der Form

$$e_p(t) = x(t) - r(\theta(t)) \tag{5}$$

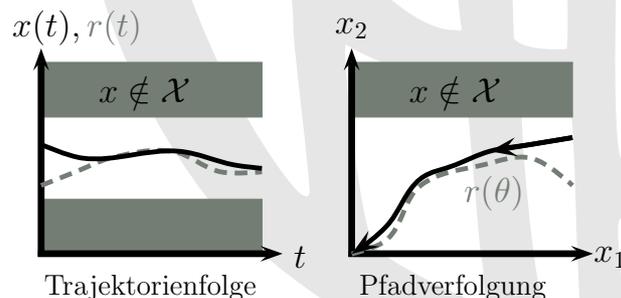


Bild 1 Trajektorienfolge und Pfadverfolgung. Während bei der Trajektorienfolge die Referenz zeitabhängig beschrieben ist, liegt bei der Pfadverfolgung eine geometrische Referenz im Zustandsraum zu Grunde.

definieren. Ziel der Pfadverfolgung ist die Konvergenz des Systemzustands gegen den Pfad, d. h. es soll gewährleistet werden, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$. Hierbei ist der Pfadparameter $\theta(t)$ eine zeitabhängige Größe, deren Dynamik jedoch nicht a priori bestimmt ist. Somit gibt der Pfad \mathcal{R} vor, welchen Weg durch den Zustandsraum ein System bewältigen soll. Es ist aber nicht vorgegeben, wann das System wo auf dem Pfad sein soll. Grundidee vieler Regelungsverfahren zur Pfadverfolgung ist es, dass der Regler sowohl die Pfadevolution als auch den Systemeingang vorgibt, d. h. $\dot{\theta}$ soll durch den Regler so bestimmt werden, dass das System dem Pfad gut folgen kann und sich immer vorwärts entlang des Pfades bewegt. Formal ergibt sich somit das folgende Pfadverfolgungsproblem, welches im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe prädiktiver Regelungsmethoden gelöst werden soll:

Definition 1 (Pfadverfolgungsproblem).

Für ein nichtlineares System (1) und einen a priori bekannten Pfad gegeben durch \mathcal{R} soll ein Regler entworfen werden, sodass folgende Anforderungen erfüllt sind:

- F1 **Pfadkonvergenz:** Der Pfadfolgefehler konvergiert, d. h. $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$.
- F2 **Vorwärtsbewegung:** Das System bewege sich vorwärts entlang des Pfades. D. h. $\dot{\theta}(t) > 0$ für alle Zeiten $t > 0$ und alle $\theta \in [\hat{\theta}, 0)$.
- F3 **Berücksichtigung von Beschränkungen:** Die Beschränkungen der Systemzustände und der Stellgrößen werden berücksichtigt: $x \in \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}$.

3 Prädiktive Pfadverfolgung

Ziel des betrachteten Pfadverfolgungsproblems ist insbesondere die Einhaltung von Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen, wie sie oftmals in der Praxis auftreten. Klassische Ansätze erlauben oft nicht, direkt solche Beschränkungen zu berücksichtigen [1; 15]. Im Folgenden wird ein prädiktives, optimierungsbasiertes Verfahren vorgeschlagen, welches erlaubt diese Beschränkungen explizit zu berücksichtigen und einzuhalten.

Grundidee der prädiktiven Regelung ist es, das anzuwendende Eingangssignal auf der Basis einer wiederholten Optimierung des über den sogenannten Prädiktionshorizont vorhergesagten, zukünftigen Systemverhaltens zu bestimmen. Hierzu wird wiederholt ein Optimalsteuerungsproblem gelöst. Beispiele prädiktiver Regelungsverfahren, die Stabilität im Fall einer Arbeitspunktstabilisierung garantieren, finden sich in [7; 9; 11].

Im Fall der Pfadverfolgung gibt es neben dem realen, auf das System wirkenden Eingang einen weiteren Freiheitsgrad, der bestimmt werden muss: Die Evolutionsgeschwindigkeit, mit der das System dem Pfad folgen soll. Die im Rahmen dieser Arbeit verfolgte Grundidee zur Lösung des Problems mit Hilfe prädiktiver Regelungsverfahren ist simpel: Anstelle des ursprünglichen Systems wird von einem System mit einem um den Pfadparameter erweiterten Zustand ausgegangen. In der

Kostenfunktion wird neben den vorhergesagten (prädizierten) Systemzuständen und Stellsignalen \bar{x}, \bar{u} auch der Pfadparameter θ und der noch näher zu spezifizierende – auf den Pfadparameter wirkende – Eingang v berücksichtigt bzw. bestraft. Der Pfadparameter θ und der virtuelle Eingang v werden hierbei als interne Größen des prädiktiven Reglers aufgefasst.

Im Sinne einer wiederholten optimalen Lösung führt dies zu folgendem, zu den Abtastzeitpunkten $t_k = k\delta$ zu minimierendem Kostenfunktional:

$$J(\bar{x}, \bar{u}, \theta, v) = \int_{t_k}^{t_k+T_p} F(\bar{x}, \bar{u}, \theta, v) d\tau + E(\bar{x}(t_k + T_p), \theta(t_k + T_p)). \quad (6)$$

Hierbei ist T_p der sogenannte Prädiktionshorizont und δ ist die – im Rahmen dieser Arbeit als konstant angesehene – Abtastzeit. Ähnlich dem Fall einer Arbeitspunktstabilisierung [7; 9; 11] wird die Stabilität durch die wiederholte Anwendung des sich ergebenden optimalen Eingangssignals durch eine korrekte Wahl der Endbestrafung $E(\cdot)$ als auch der positiv-definiten Kostenfunktion $F(\cdot)$, welche beide von $\theta(t_k + T_p)$ bzw. θ abhängen, erzwungen.

Das auf das System angewendete Eingangssignal ist durch Lösung des folgenden Optimalsteuerungsproblems zu den Abtastzeiten t_k gegeben¹:

$$\min_{\bar{u}(\cdot), v(\cdot)} J(\bar{x}, \bar{u}, \theta, v). \quad (7)$$

Hierbei ist neben dem vorhergesagten Eingangssignal \bar{u} die Pfadgeschwindigkeit v eine der zu bestimmenden Größen. Bei der Lösung des Optimalsteuerungsproblems müssen die – für die prädiktive Regelung nichtlinearer Systeme typischen – Nebenbedingungen an die Systemdynamik sowie die Beschränkungen berücksichtigt werden:

$$\dot{\bar{x}}(\tau) = f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \quad \bar{x}(t_k) = x(t_k), \quad (8a)$$

$$\forall \tau \in [t_k, t_k + T_p]: \quad \bar{x}(\tau) \in \mathcal{X}, \quad \bar{u}(\tau) \in \mathcal{U}, \quad (8b)$$

$$\bar{x}(t_k + T_p) \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (8c)$$

Die Endbedingung (8c) fordert, dass der Systemzustand zum Ende jeder Prädiktion in einer zu bestimmenden Endregion \mathcal{E} liegen muss. Diese Bedingung wird im Weiteren dazu genutzt, die Stabilität des Verfahrens zu garantieren. Zusätzlich impliziert diese Bedingung eine Mindestlänge für den Prädiktionshorizont T_p . D. h. der Prädiktionshorizont muss mindestens so lang sein, dass das Optimalsteuerungsproblem eine Lösung zum Zeitpunkt t_0 besitzt.

¹ Der Nachweis der Existenz der Lösung eines Optimalsteuerungsproblems ist im Allgemeinen schwierig, siehe z. B. [9]. Umgangen wird dies oft durch den Übergang von der Bestimmung des Minimums auf die Bestimmung des Infimums. Zur Vereinfachung der Darstellung schreiben wir jedoch *min* an Stelle von *inf*.

Neben der Systemdynamik ist für die Pfadverfolgungsaufgabe die Einhaltung der folgenden Nebenbedingungen notwendig:

$$\dot{\theta}(\tau) = g(\theta(\tau), v(\tau)), \quad (9a)$$

$$\theta(t_k) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \|x(t_k) - r(\theta)\|, \quad \theta(t_k) > \theta(t_{k-1}) \quad (9b)$$

$$\forall \tau \in [t_k, t_k + T_p]: \quad \theta(\tau) \in [\hat{\theta}, 0], \quad v(\tau) \in \mathcal{V}. \quad (9c)$$

Bedingung (9a) beschreibt die Dynamik des Pfadparameters $\dot{\theta} = g(\theta, v)$, d. h. die Sollevolution des Systems entlang des gewünschten Pfades. Hierbei ist zu beachten, dass diese Dynamik vom virtuellen Pfadparametereingang v (der *Pfadgeschwindigkeit*) abhängt. Um die Evolution des Pfadparameters im Rahmen jeder Prädiktion bestimmen zu können, ist eine Anfangsbedingung $\theta(t_k)$ notwendig. Um Störungen zu berücksichtigen, wird zu Beginn jeder Prädiktion durch eine zusätzliche, skalare Optimierung der Pfadparameter bestimmt, der den Abstand zwischen abgetastetem Systemzustand $x(t_k)$ und dem Pfad \mathcal{R} minimiert (9b). Um zu garantieren, dass der Pfad in positiver Richtung durchlaufen wird, wird bei der Bestimmung des minimierenden Pfadparameters $\theta(t_{k+1}) > \theta(t_k)$ gefordert. Die Dynamik des Pfadparameters ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad des Reglerentwurfs. Sie ist so zu wählen, dass für alle $\theta \in [\hat{\theta}, 0]$ und alle $v \in \mathcal{V}$ Forderung F2 ($\dot{\theta} = g(\theta, v) > 0$) erfüllt ist.

Die Lösung des durch (6)–(9) gegebenen Optimalsteuerungsproblems führt zu einem optimalen Stellsignal $\bar{u}^*(t, x(t_k))$, welches das bis zur nächsten Abtastung des Systemzustands auf die Strecke anzuwendende Stellsignal definiert:

$$u(t) = \bar{u}^*(t, x(t_k)), \quad t \in (t_k, t_k + \delta]. \quad (10)$$

Das durch (6)–(10) beschriebene Verfahren zur prädiktiven Lösung des Pfadverfolgungsproblems ist eine Erweiterung bekannter prädiktiver Ansätze. Das Optimalsteuerungsproblem wird um den Pfadparameter θ als zusätzliche Zustandsgröße und den virtuellen Eingang v als zusätzliche Stellgröße erweitert. Die Evolution des Pfadparameters wird dabei durch die Optimierung so bestimmt, dass das zu regelnde System (1) dem Pfad möglichst gut folgt. Dabei ist die Geschwindigkeit der Pfadentwicklung sekundär gegenüber der Forderung, möglichst gut dem Pfad zu folgen.

Stabilität des prädiktiven Pfadverfolgungsreglers

Im Folgenden werden hinreichende Bedingungen vorgestellt, die die Stabilität des geschlossenen Kreises unter dem vorgestellten Regelungsansatz garantieren. Grundsätzlich basieren die dazu erforderlichen Annahmen auf Arbeiten zur Arbeitspunktstabilisierung mit Hilfe prädiktiver Regelungsverfahren, siehe [7; 9; 11]. Eine detaillierte Beschreibung der für die Pfadverfolgung notwendigen Annahmen ist in [5] enthalten.

Satz 1 (Stabilität prädiktiver Pfadverfolgung).

Angenommen die folgenden Bedingungen sind erfüllt:

- (i) Die Endregion \mathcal{E} ist kompakt und für alle $\theta \in [\hat{\theta}, 0]$ gilt, dass $r(\theta) \in \mathcal{E}$. Die Endbestrafung $E(x, \theta)$ ist stetig differenzierbar und positiv semidefinit, mit $E(0, 0) = 0$.
- (ii) Für alle $(x, \theta) \in \mathcal{E} \times [\hat{\theta}, 0]$ existiert ein Paar zulässiger Eingangssignale $(u_{\mathcal{E}}, v_{\mathcal{E}}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, sodass

$$\nabla E(x, \theta) \cdot \begin{pmatrix} f(x, u_{\mathcal{E}}) \\ g(\theta, v_{\mathcal{E}}) \end{pmatrix} + F(x, \theta, u_{\mathcal{E}}, v_{\mathcal{E}}) \leq 0 \quad (11)$$

und die Lösungen von $\dot{x} = f(x, u_{\mathcal{E}})$ und $\dot{\theta} = g(\theta, v_{\mathcal{E}})$ beginnend bei $(x, \theta) \in \mathcal{E} \times [\hat{\theta}, 0]$ bleiben für alle Zeiten in $\mathcal{E} \times [\hat{\theta}, 0]$.

- (iii) Das Optimalsteuerungsproblem besitzt eine Lösung zum Zeitpunkt t_0 .

Dann gilt für den geschlossenen Kreis gegeben durch (1), (6)–(10), dass der Pfadfolgefehler $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - r(\theta(t)) = 0$ konvergiert. Des Weiteren ist der Einzugsbereich durch alle Anfangszustände, für die das Optimalsteuerungsproblem (6)–(9) eine Lösung besitzt, gegeben.

Beweisskizze

Das umrissene Regelungsschema (6)–(10) kann mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$y = (x - r(\theta), \theta)^T, \quad y \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$w = (u, v)^T, \quad w \in \mathbb{R}^{m+1}$$

in das Problem der Stabilisierung des Ursprungs des \mathbb{R}^{n+1} überführt werden. Daher können in den neuen Koordinaten direkt bekannte Ergebnisse zur Stabilität prädiktiver Regelung angewendet werden, siehe zum Beispiel [7; 9; 11].

In diesen neuen Koordinaten ist die Invarianzbedingung für die Endregion (11) gegeben durch

$$\nabla \tilde{E}(y) \cdot \tilde{f}(y, w) + \tilde{F}(y, w) \leq 0. \quad (12)$$

Hierbei ist $\tilde{f}(y, w)$ durch $\frac{dy}{dt} = (\dot{x} - \frac{\partial r}{\partial \theta} \dot{\theta}, \dot{\theta})^T$ bestimmt.

Die Rücktransformation der Endbestrafung $\tilde{E}(y)$ aus (12) in x, θ, u, v -Koordinaten ergibt

$$\nabla \tilde{E}(y) = \nabla E(x, \theta) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{n \times n} & \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \mathbf{0}^{1 \times n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs wird die Invarianzbedingung (12) zurück in die Ausgangskordinaten übertragen. Die Bedingungen (i)–(iii) folgen direkt aus den Forderungen für Stabilität in y, w -Koordinaten.

Bestimmung stabilisierender Endbestrafungen und Endregionen

Die Bestimmung von passenden Endregionen und Endbestrafungen ist sowohl für die Arbeitspunktstabilisierung als auch für Trajektorienfolge und Pfadverfolgung im Allgemeinen schwierig. Die Invarianzbedingung (11) aus Satz 1 ist einer Ljapunov-Ungleichung sehr ähnlich.

Daher ist die Bestimmung einer (lokalen) Kontroll-Ljapunovfunktion als Endbestrafung $E(\cdot)$ und eines die Stellbeschränkungen garantierenden Levelsets dieser Funktion als Endregion \mathcal{E} meist *hinreichend*, um die Stabilität des geschlossenen Kreises unter einer modellprädiktiven Regelung zu garantieren, siehe z. B. [3]. Für die Endbestrafung $E(\cdot)$ wird in Satz 1 und ähnlichen Ergebnissen in [7; 9] jedoch nur positive Semidefinitheit gefordert. Daher ist klar, dass es nicht *notwendig* ist, dass die Endbestrafung $E(\cdot)$ eine Kontroll-Ljapunovfunktion ist. In [9] wird dies an einem Beispiel diskutiert.

Die Betrachtung der Invarianzbedingung (11) aus Satz 1 macht deutlich, dass die zusätzlichen Freiheitsgrade des Pfadverfolgungsproblems im Reglerentwurf und somit auch bei der Wahl der Endregion und der Endbestrafung genutzt werden können. So sind in (11) sowohl die Dynamik des Pfadparameters $g(\theta, v)$ als auch die Endbestrafung $E(x, \theta)$ und die Endregion \mathcal{E} so zu bestimmen, dass Voraussetzung (ii) des Satzes 1 erfüllt ist. Im Folgenden wird gezeigt, wie ausgehend von einem pfadverfolgenden Stellsignal $u_{\mathcal{E}}$ die Endbestrafung $E(x, \theta)$ und die Endregion \mathcal{E} so bestimmt werden können, dass die Stabilitätsbedingungen aus Satz 1 erfüllt sind. Unter einem pfadverfolgenden Stellsignal $u_{\mathcal{E}}$ verstehen wir hierbei ein Eingangssignal, welches das System ausgehend von einem auf dem Pfad liegenden Startpunkt $x_0 \in \mathcal{R}$ entlang des Pfades in positive Richtung mit $\dot{\theta} = g(\theta, v_{\mathcal{E}}) > 0$ führt.

Zur Vereinfachung der Betrachtung sei im Weiteren die Kostenfunktion für das Optimalsteuerungsproblem durch

$$F(x, \theta, u, v) = \left\| \begin{matrix} x - r(\theta) \\ \theta \end{matrix} \right\|_Q^2 + \left\| \begin{matrix} u - \tilde{u} \\ v - \tilde{v} \end{matrix} \right\|_R^2 \quad (13)$$

gegeben. Die Gewichtungsmatrizen $Q, R > 0$ werden hierbei als strikt positiv definit angenommen. Es gilt $\|(0, \theta)^T\|_Q^2 = \dot{q}\theta^2$. \tilde{u}, \tilde{v} sind die konstanten Referenzwerte der Stellgrößen.

Die Endbestrafung $E(x, \theta)$ aus (11) muss nicht notwendigerweise vom Zustand x und dem Pfadparameter θ abhängen, da für $E(x, \theta)$ positive *Semidefinitheit* gefordert wird. Wird ein nur von θ abhängender Ansatz für die Endbestrafung $E(\theta)$ gewählt, vereinfacht sich die Invarianzbedingung (11) erheblich. Der Zustand x taucht nur noch als Argument der Kostenfunktion $F(x, \theta, u, v)$ auf.

Sind Stellsignale $u_{\mathcal{E}} \in \mathcal{U}$ und $v_{\mathcal{E}} \in \mathcal{V}$ bekannt, sodass das System (1) dem Pfad \mathcal{R} aus (4) ausgehend von einem Startpunkt auf dem Pfad mit $\dot{\theta} > 0$ folgt, dann kann $\mathcal{E} = \mathcal{R}$ als Endregion gewählt werden. Jedem $x \in \mathcal{R}$ kann eineindeutig ein Wert des Pfadparameters θ zugeordnet werden, sodass $x = r(\theta)$. Demzufolge ist auf dem Pfad die Kostenfunktion $F(\cdot)$ nur vom Pfadparameter θ und den Eingangssignalen $u_{\mathcal{E}}$ und $v_{\mathcal{E}}$ abhängig. Die Invarianzbedingung (11) vereinfacht sich damit zu

$$\nabla E(\theta) \cdot g(\theta, v_{\mathcal{E}}) + \dot{q}\theta^2 + \left\| \begin{matrix} u_{\mathcal{E}} - \tilde{u} \\ v_{\mathcal{E}} - \tilde{v} \end{matrix} \right\|_R^2 \leq 0.$$

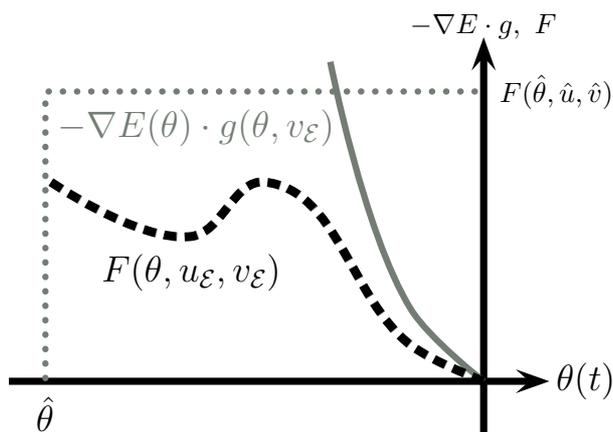


Bild 2 Veranschaulichung von Korollar 1. Gleichung (14) aus Korollar 1 bedeutet, dass die Kostenfunktion F entlang des Pfades durch die quadratische Endbestrafung $E(\theta)$ abgeschätzt wird und schneller als $-\nabla E \cdot g$ gegen 0 konvergiert.

Diese vereinfachte Invarianzbedingung ist nicht direkt vom Zustand x abhängig. Die vorangegangene Argumentation kann in folgendem Korollar zu Satz 1 zusammengefasst werden [6].

Korollar 1.

Sei die Kostenfunktion $F(\cdot)$ der Form (13), und die Endregion \mathcal{E} entspreche dem zu verfolgenden Pfad \mathcal{R} aus (4). Daneben seien $v_{\mathcal{E}}$ und ein pfadverfolgendes Stellsignal $u_{\mathcal{E}}$ bekannt und es existiert ein konstantes $\epsilon > 0$, sodass für alle $\theta \in [\hat{\theta}, 0]$ gilt

$$\epsilon > \frac{\dot{\theta}^2 + \left\| \begin{matrix} u_{\mathcal{E}} - \tilde{u} \\ v_{\mathcal{E}} - \tilde{v} \end{matrix} \right\|_R^2}{-g(\theta, v_{\mathcal{E}}) \cdot \theta} \geq 0. \tag{14}$$

Dann garantiert die Endbestrafung $E(\theta) = \frac{\epsilon}{2}\theta^2$ für den durch (6)–(10) gegebenen, geschlossenen Kreis, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - r(\theta(t)) = 0$.

Dieses Korollar erlaubt unter den angegebenen Bedingungen die Bestimmung einer geeigneten, Stabilitätsgarantierenden Endbestrafung. Die Konvergenz des geschlossenen Kreises und der Einzugsbereich des Reglers sind dann nur noch durch die Lösbarkeit des Optimalsteuerungsproblems zum Zeitpunkt $t = t_0$ bedingt. Die durch das Korollar vorgenommene Abschätzung der auf dem Pfad entstehenden Kosten ist in Bild 2 grafisch veranschaulicht. Sowohl die Kosten entlang des Pfades als auch die Änderung der Endbestrafung entlang des Pfades können über θ aufgetragen werden. Die Bedingungen aus Korollar 1 garantieren, dass eine quadratische Endbestrafung $E(\theta)$ die Kosten entlang des Pfades abschätzt und somit zur Stabilität des geschlossenen Kreises führt.

4 Beispiel: Pfadverfolgung für ein Fahrzeug

Zur Veranschaulichung des vorgeschlagenen Regelungskonzepts wird ein vereinfachtes Modell eines Fahrzeuges

mit Lenkeingriff und Antrieb betrachtet:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos(x_3) \\ u_1 \sin(x_3) \\ u_1 \tan(u_2) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Die Zustände x_1 und x_2 beschreiben die Position des Fahrzeugs in der x_1 - x_2 -Ebene, x_3 ist der bezüglich der x_1 -Achse gemessene Gierwinkel. Die Stellgrößen sind die Vorwärtsgeschwindigkeit $u_1 \in [0, 6]$ und der Lenkwinkel $u_2 \in [-0,63, 0,63]$. Der zu verfolgende Pfad \mathcal{R} ist durch

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} \theta \\ \rho(\theta) \\ \arctan\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix} \tag{16}$$

gegeben. Es gilt $\rho(\theta) = -\alpha \log(\gamma/(\beta + |\theta|)) \cdot \sin(\omega\theta)$, $\theta \in [-30, 0]$. Die Koeffizienten von $\rho(\theta)$ sind $\alpha = 6$, $\beta = 5$, $\gamma = 20$, $\omega = 0,35$. Die Definition der dritten Komponente von r beschreibt, dass das Fahrzeug immer in Tangentialrichtung entlang der durch $(\theta, \rho(\theta))^T$ gegebenen Kurve in der x_1 - x_2 -Ebene fahren soll.

Reglerentwurf

Unter Verwendung des Ergebnisses aus Korollar 1 soll ein Regler entworfen werden. Die Kostenfunktion $F(\cdot)$ entspricht (13), wobei für die Matrizen $Q = 8 \cdot \text{diag}(10^4, 10^5, 10^5, \frac{1}{16})$ und $R = \text{diag}(10, 10, 1)$ gilt. Als Endregion wird der durch (16) gegebene Pfad \mathcal{R} gewählt. Um die Überprüfung der in Korollar 1 angegebenen Bedingungen zu vereinfachen, wird die Pfadevolution $\dot{\theta} = g(\theta, v) = -\lambda\theta + v$, $\lambda = 10^{-3}$, $v \in [0, 6]$ gewählt.

Um eine stabilisierende Endbestrafung bestimmen zu können, muss ein zulässiges, pfadverfolgendes Eingangssignal $u_{\mathcal{E}} \in \mathcal{U}$ bekannt sein. Wenn sich das System auf dem Pfad befindet und die Pfadevolution $\dot{\theta}$ vorgegeben ist, entspricht $r(\theta(t))$ der Solltrajektorie des Systems. Das betrachtete System (15) ist differentiell flach (vgl. [8]), mit dem flachen Ausgang $y = (x_1, x_2)^T$. Daher ist ein pfadverfolgendes Eingangssignal $u_{\mathcal{E}}$ in Abhängigkeit der Pfadevolution $\dot{\theta} = g(\theta, v)$ durch

$$\begin{pmatrix} u_{\mathcal{E},1} \\ u_{\mathcal{E},2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} \\ \arctan\left(\left(1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2}\right) \end{pmatrix} \tag{17}$$

gegeben. Es lässt sich leicht überprüfen, dass für $v_{\mathcal{E}} = 0$ die Stellgrößenbeschränkungen eingehalten werden. Zu beachten ist, dass das Stellsignal $u_{\mathcal{E},2}$ am Ende des Pfades nicht gleich 0 ist. Daher werden die konstanten Referenzwerte der Stellsignale auf $\tilde{u}_2 = u_{\mathcal{E},2}|_{\theta=0}$ und $\tilde{u}_1 = 0$ gesetzt. Außerdem gilt

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}^2 + \left\| \begin{matrix} u_{\mathcal{E},1} - \tilde{u}_1 \\ u_{\mathcal{E},2} - \tilde{u}_2 \end{matrix} \right\|_R^2}{10^{-3} \cdot \theta^2} = 0.$$

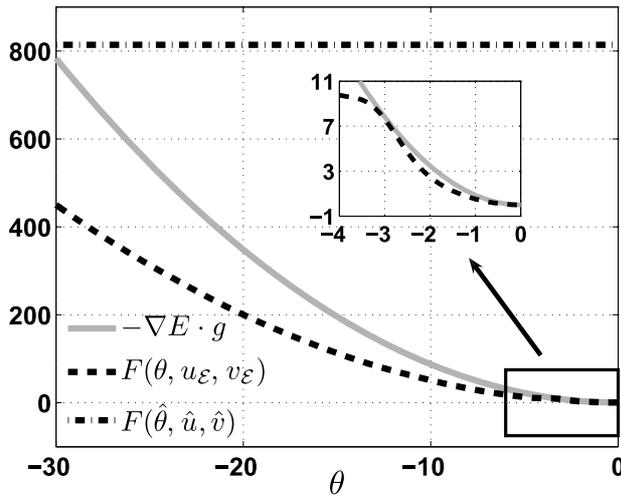


Bild 3 Stabilisierende Endbestrafung. Der Verlauf der Kostenfunktion F für das Stellsignal $u_{\mathcal{E}}$ aus (17) ist entlang des Pfades über den Pfadparameter θ aufgetragen. Die Endbestrafung $E(\theta) = \frac{\epsilon}{2}\theta^2$, $\epsilon = 1740$ garantiert Stabilität.

Dies ist äquivalent dazu, dass die Kosten entlang des Pfades schneller gegen 0 konvergieren als die Endbestrafung $E(\theta)$. In Bild 3 sind die Kosten entlang des Pfades aufgetragen. Mit $\epsilon = 1740$ garantiert die Endbestrafung $E(\theta) = \frac{\epsilon}{2}\theta^2$ die Konvergenz des Systems im Sinne von Korollar 1.

Simulationsergebnisse

Die Diagramme a–d in Bild 4 zeigen die Simulationsergebnisse für die Anwendung des vorgeschlagenen prädiktiven Regelungsverfahrens. Die Simulationen wurden mit Hilfe des Softwarepaketes *OptCon* unter Matlab durchgeführt. Details zu diesem Paket finden sich in [13].

Für die Simulationen ist $T_P = 1$ der Prädiktionshorizont und $\delta = 0,5$ die Abtastzeit. Zum Vergleich sind

auch die Ergebnisse für eine optimierungsbasierte Lösung des korrespondierenden Trajektorienfolgeproblems für $\theta = 4,1 = \text{const.}$ dargestellt. In allen Diagrammen in Bild 4 sind die Ergebnisse für die Pfadverfolgung schwarz und die für die Trajektorienfolge schwarz gestrichelt aufgetragen. Beide Verfahren konvergieren zuerst gut gegen den Sollverlauf in der x_1 - x_2 -Ebene (vgl. Bild 4a), jedoch scheidet das Trajektorienfolgeverfahren im Anschluss an die letzte Kurve durch die Begrenzung der Stellgröße u_1 . Die gewählte Solltrajektorie ist unter den vorgegebenen Stellgrößenbeschränkungen nicht realisierbar. Die Zeitverläufe der Zustandsgrößen sind für beide Verfahren in den Diagrammen 4c und d dargestellt. Im Vergleich der Sollverläufe in beiden Abbildungen ist gut zu erkennen, dass für die Pfadverfolgung (vgl. Bild 4c) die Zeitverläufe der Sollgrößen erst zeitlich gestreckt und dann gestaucht werden.

5 Mehrdimensionale Pfadkorridore

Bisher wurde davon ausgegangen, dass sich das System exakt auf einer vorgegebenen Kurve bewegen soll. In der Praxis liegen jedoch oftmals zusätzliche Freiheitsgrade vor. So hat eine Straße eine gewisse Breite und es ist nur wichtig, dass ein Fahrzeug diese nicht verlässt. Schiffe oder Flugzeuge müssen sich in einem gewissen Korridor aufhalten. Bildlich gesprochen, soll das System nicht mehr nur einer parametrisierten Kurve folgen, sondern sich in einer mehrdimensionalen Fläche (Mannigfaltigkeit) bewegen. D. h. das Pfadverfolgungsproblem wird im Folgenden um zusätzliche Freiheitsgrade erweitert, sodass neben dem zeitlichen Freiheitsgrad (*wann* ist das System *wo* auf dem Pfad) auch örtliche Freiheitsgrade bezüglich des Pfades berücksichtigt werden können.

Im Vorangegangenen wurde der zu verfolgende, a priori bekannte Pfad als Kurve $\mathcal{R} = \{r(\theta) \in \mathbb{R}^n : \theta \in [\hat{\theta}, 0] \mapsto r(\theta)\}$ im Zustandsraum definiert, vgl. (4). Um

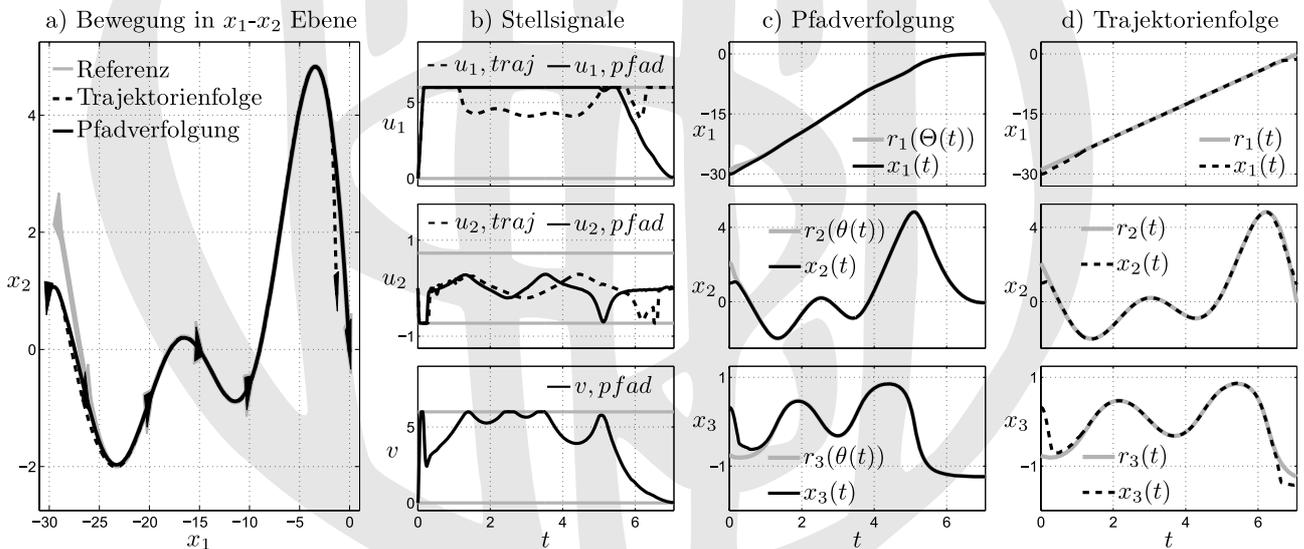


Bild 4 Simulationsergebnisse. Diagramm (a) zeigt die Bewegung in der x_1 - x_2 -Ebene für Pfadverfolgung und Trajektorienfolge. Diagramme (b)–(d) zeigen die zugehörigen Stellsignale und Zustandsgrößen.

article is protected by German copyright law. You may copy and distribute this article for your personal use only. Other use is only allowed with written permission by the copyright holder.

örtliche Freiheitsgrade zu berücksichtigen wird diese Beschreibung erweitert

$$\mathcal{R}_k = \{r_k(\Theta) \in \mathbb{R}^n : \Theta \in [\underline{\Theta}, \overline{\Theta}] \subset \mathbb{R}^k \mapsto r_k(\Theta)\}. \quad (18)$$

\mathcal{R}_k ist dabei die Menge der zulässigen Pfade, die durch die Abbildung $r_k : \Theta \in \mathbb{R}^k \mapsto r_k(\Theta) \in \mathbb{R}^n$, $k < n$ beschrieben ist. $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T \in \mathbb{R}^k$ ist der Vektor der beschreibenden Parameter, deren Definitionsbereiche durch das vektorwertige Intervall $[\underline{\Theta}, \overline{\Theta}]$ gegeben sind, wobei $\theta_1 \in [\hat{\theta}_1, 0]$ gilt. Die erste Komponente von Θ gibt die Bewegungsrichtung und Orientierung in diesem Pfadkorridor an, die anderen Komponenten $\underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \overline{\theta}_i$, $i = 2 \dots k$ beschreiben örtliche Freiheitsgrade im Pfadkorridor. Das Ende des Korridors liege im Ursprung $r_k(\Theta = 0) = 0$. Die Abbildung r_k sei ganz entsprechend dem 1-d Fall bijektiv, hinreichend oft stetig differenzierbar und abstandsregulär in \mathcal{X} .

Die Idee der erweiterten Beschreibung ist es, neben dem zeitlichen Freiheitsgrad noch zusätzliche örtliche Freiheitsgrade im Pfadverfolgungsproblem zuzulassen. Entsprechend Bild 5 soll sich das System in einem a priori bekannten Pfadkorridor, in einem durch den ersten Pfadparameter vorgegebenen Bewegungssinn in den Ursprung bewegen. Im Gegensatz zum 1d-Pfadverfolgungsproblem ist nun nicht nur die zeitliche Evolution des Pfadparameters $\theta_1(t)$ ein Freiheitsgrad des Reglerentwurfes. Vielmehr kann mit Hilfe der zusätzlichen Parameter $\theta_2(t) \dots \theta_k(t)$ auch der örtliche Verlauf der Referenz im Zustandsraum beeinflusst werden.

Definition 2 (Erweitertes Pfadverfolgungsproblem).

Für ein nichtlineares System (1) und einen a priori bekannten k -dimensionalen Pfadkorridor \mathcal{R}_k aus (18) soll ein Regler entworfen werden, sodass folgende Anforderungen erfüllt sind:

- E1 **Konvergenz:** Der Pfadfolgefehler konvergiert, d. h. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - r_k(\Theta(t)) = 0$. Damit das Ende des Pfadkorridors im Ursprung liegt, muss zusätzlich $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i(t) = 0$ für alle $i = 2 \dots k$ gelten.
- E2 **Vorwärtsbewegung:** Die Bedingung zur Vorwärtsbewegung im Pfadkorridor ist in Abhängigkeit von $\theta_1(t)$ gegeben: $\forall t > 0, \forall \theta_1 \in [\hat{\theta}_1, 0) \quad \dot{\theta}_1(t) > 0$.
- E3 **Berücksichtigung von Beschränkungen:** Die Beschränkungen der Systemzustände und der Stellgrößen werden berücksichtigt: $x \in \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}$.

Das in Abschnitt 3 vorgeschlagene prädiktive Verfahren kann auch zur Lösung der erweiterten Problemstellung genutzt werden. Dazu wird der den Korridor beschreibende Vektor $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T \in \mathbb{R}^k$ als zusätzlicher, durch $\dot{\Theta} = g(\Theta, v)$ beschriebener Zustand eingeführt. Außerdem wird auch der virtuelle Eingang $v \in \mathbb{R}^k$ entsprechend der Dimension von Θ erweitert, sodass $\dot{\Theta} = g(\Theta, v)$ steuerbar ist.

Hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines solchen Vorgehens können entsprechend den Ergebnissen aus Satz 1 gefunden werden. Eine entsprechende Erweiterung von Satz 1 wird in [6] vorgestellt und diskutiert.

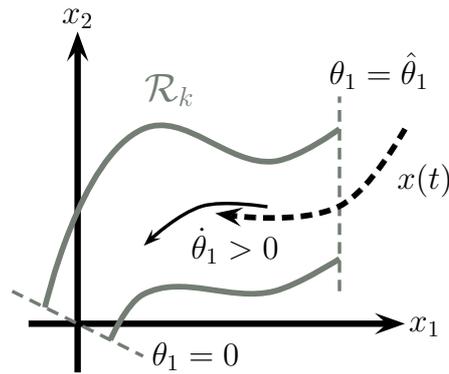


Bild 5 Prinzipskizze eines 2d-Pfadkorridors. Die erste Komponente von Θ gibt die Bewegungsrichtung und Orientierung im Korridor \mathcal{R}_k vor. Dadurch kann $\theta_1 = \hat{\theta}$ als *Beginn* und $\theta_1 = 0$ als *Ende* des Korridors aufgefasst werden.

Beispiel

Für das Beispiel des Fahrzeugs aus Abschnitt 4 kann anschaulich ein erweitertes Pfadverfolgungsproblem formuliert werden. Das Fahrzeug soll nicht genau dem durch (16) gegebenen Pfad \mathcal{R} folgen, sondern es ist in der Normalenrichtung der Kurve $(\theta_1, \rho(\theta_1))$ eine Abweichung der variablen Länge θ_2 zugelassen. Der in Abhängigkeit von den Parametern $\Theta = (\theta_1, \theta_2)^T \in [-30, 0] \times [-1,25, 1,25]$ beschriebene Pfadkorridor $\mathcal{R}_2 = \{p(\Theta) \in \mathbb{R}^3 : \Theta \mapsto p(\Theta)\}$ ist gegeben durch

$$p(\Theta) = r(\theta_1) + \begin{pmatrix} -\theta_2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \theta_1} \|(\theta_1, \rho(\theta_1))\|^{-1} \\ \theta_2 \cdot \|(\theta_1, \rho(\theta_1))\|^{-1} \\ \arctan\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1}\right) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Die Dynamik der Pfadparameter ist wieder linear. Es gilt $\dot{\theta}_1 = -10^{-3}\theta_1 + v_1$ und $\dot{\theta}_2 = -10^{-2}\theta_2 + v_2$. θ_1 und θ_2 werden von je einem virtuellen Eingang $v_1 \in [0, 6]$, $v_2 \in [-5, 5]$

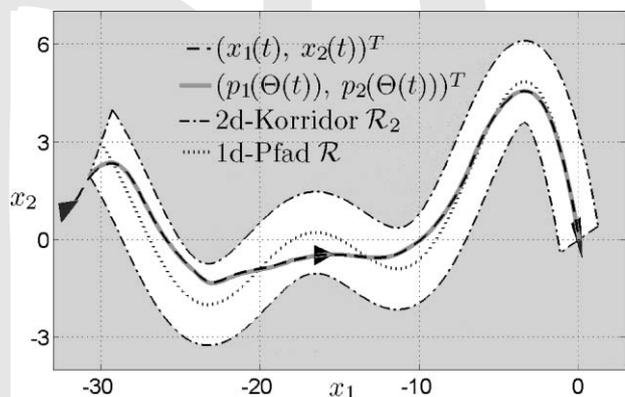


Bild 6 2d-Simulationsergebnisse. Der Regler sucht in dem hell hervorgehobenen 2d-Pfadkorridor \mathcal{R}_2 einen 1d-Kurs $p(\Theta(t))$ (grau), dem das Fahrzeug (schwarz gestrichelt) folgt. Abgebildet sind die Projektionen von \mathcal{R} und \mathcal{R}_2 in die x_1 - x_2 Ebene.

beeinflusst. Bild 6 zeigt die Ergebnisse für dieses Beispiel. Der Regler bewegt das System, außerhalb des Korridors startend, in den hell hervorgehobenen Pfadkorridor \mathcal{R}_2 hinein, um dann der wiederum durch den Regler bestimmten Referenz $p(\Theta(t)) \subset \mathcal{R}_2$ bis zum Ursprung zu folgen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieses Beitrags wurde ein prädiktiver Ansatz zur Lösung von Pfadverfolgungsproblemen für nichtlineare Systeme unter Stellgrößen- und Zustandsbeschränkungen vorgestellt, dessen Stabilität garantiert werden kann.

Insbesondere wurden für das Problem der Verfolgung eines eindimensionalen Pfades aufgezeigt, wie bei Kenntnis eines nominell pfadverfolgenden Stellsignals vergleichsweise einfach, die Stabilität des vorgeschlagenen prädiktiven Regelungsschemas garantiert werden kann. Zusätzlich wurde diskutiert, wie der vorgeschlagene Ansatz auch die Berücksichtigung örtlicher Freiheitsgrade in der Pfaddefinition zulässt.

Zukünftige Arbeiten werden untersuchen, ob und wie ein Ausgangspfadverfolgungsproblem mit Hilfe prädiktiver Methoden gelöst werden kann.

Literatur

- [1] A. P. Aguiar, J. P. Hespanha, and P. V. Kokotovic. Performance limitations in reference tracking and path following for nonlinear systems. *Automatica*, 44(3):598–610, 2008.
- [2] A. Bemporad. Reference governor for constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 43(3):415–419, 1998.
- [3] H. Chen and F. Allgöwer. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 34(10):1205–1217, 1998.
- [4] K. D. Do and J. Pan. Global robust adaptive path following of underactuated ships. *Automatica*, 42(10):1713–1722, 2006.
- [5] T. Faulwasser and R. Findeisen. Nonlinear model predictive path-following control. In L. Magni, D. Raimundo, and F. Allgöwer, editors, *Nonlinear model predictive control: Towards new challenging applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences (LNCIS) 384, pages 335–343. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [6] T. Faulwasser, B. Kern, and R. Findeisen. Model predictive path-following control for nonlinear systems. Submitted to CDC 2009.
- [7] R. Findeisen. *Nonlinear Model Predictive Control: A Sampled-Data Feedback Perspective*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8, Nr. 1087, VDI Verlag, 2006.
- [8] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Int. J. Contr.*, 61(6):1327–1361, 1995.
- [9] F. Fontes. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers. *Sys. Contr. Lett.*, 42(2):127–143, 2001.
- [10] D. Limon, I. Alvarado, Alamo T., and E. F. Camacho. MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, 44(9):2382–2387, 2008.
- [11] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.
- [12] H. Michalska. Trajectory tracking control using the receding horizon strategy. In *Symposium on Control, Optimization and Supervision: CESA '96 IMACS*, 1996.
- [13] Z. K. Nagy. Applications and application aspects of NMPC – from simulation to industrial implementation via OptCon. In *Proc. of the Int. Workshop on Nonlinear Model Predictive Control – Software and Applications (NMPC-SOFAP)*, Loughborough, UK, 35–36, 2007.
- [14] Z. K. Nagy. Model based control approach for batch crystallization product design. In *Proc. of the 17th World Congress the Int. Fed. of Auto. Contr.*, Seoul, Korea, 2008.
- [15] R. Skjetne, T. Fossen, and P. Kokotovic. Robust output maneuvering for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 40(3):373–383, 2004.

Manuskripteingang: 8. Mai 2009



Dipl.-Ing. Timm Faulwasser ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg und Mitglied der International Max Planck Research School for Analysis, Design and Optimization in Chemical and Biochemical Process Engineering. Arbeitsgebiete: prädiktive und optimierungsbasierte Regelung für nichtlineare Systeme, optimierungsbasierte Ansätze zur Lösung von Pfadverfolgungs- und Trajektorienfolgeproblemen, Regelung von PEM-Brennstoffzellen.

Adresse: Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Automatisierungstechnik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, E-Mail: timm.faulwasser@ovgu.de



Prof. Dr.-Ing. Rolf Findeisen ist Professor für Systemtheorie und Regelungstechnik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Hauptarbeitsgebiete: optimierungsbasierte Analyse und Regelung nichtlinearer Systeme, prädiktive Regelung, Entwicklung systemtheoretischer Methoden für biologische Systeme, Systembiologie, Identifikation, Regelung mechatronischer Systeme und Führung verfahrenstechnischer und energetischer Prozesse.

Adresse: Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Automatisierungstechnik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, E-Mail: rolf.findeisen@ovgu.de