



# Schnelle Regelung linearer Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen

Fast Control of Linear Systems Subject to Input Amplitude and Rate Constraints

Klaus Kefferpütz, Jürgen Adamy, TU Darmstadt

**Zusammenfassung** In diesem Artikel wird eine nichtlineare Zustandsrückführung für Regelstrecken mit linearer Dynamik unter Verwendung eines hinsichtlich Stellgröße und Stellrate beschränkten Stellgliedes vorgestellt. Dabei wird die Sättigung von Stellgröße und Stellrate zugelassen, wodurch sehr schnelle Regelvorgänge ermöglicht werden. Zur Bestimmung der Reglerparameter wird ein LMI-basiertes Ent-

wurfsverfahren angegeben. ▶▶▶ **Summary** This paper presents a nonlinear feedback control for systems with linear dynamics and an amplitude and rate limited actuator. Saturation concerning amplitude and rate is allowed leading to a very high performance. An efficient LMI based design algorithm for the controller parameterization is presented.

**Schlagwörter** Stellratenbegrenzung, geschachtelte Sättigung, weiche strukturvariable Regelung ▶▶▶ **Keywords** Rate limitation, nested saturation, soft variable-structure control

## 1 Einleitung

Jedes reale System unterliegt Beschränkungen hinsichtlich des verwendeten Stellgliedes. Zum einen ist die Stellgröße selbst beschränkt, zum anderen unterliegt in der Regel auch die Stellrate einer Beschränkung.

Will man die Methoden der linearen Regelungstheorie zur Analyse bzw. zum Entwurf einsetzen, so ist sicherzustellen, dass diese Beschränkungen nicht verletzt werden. Andernfalls verlieren die linearen Methoden ihre Gültigkeit. Dies geschieht zu dem Preis, dass eine so ausgelegte Regelung deutlich längere Ausregelzeiten aufweist als theoretisch erzielbar wären. Eine Beschleunigung des Ausregelverhaltens lässt sich dadurch erreichen, dass sättigende Stellgrößen und Stellraten erlaubt werden. In den Stabilitätsuntersuchungen müssen dann beide Sättigungen berücksichtigt werden. Beispiele solcher Ansätze finden sich u. a. in [4] und [7].

Ein anderer Ansatz, der für Systeme unter Stellgrößenbegrenzungen gute Ergebnisse erzielt, ist die Verwendung eines nichtlinearen Reglers. Besonders gute Ergebnisse konnten erzielt werden, indem für solche Regelungen zusätzlich auch eine gesättigte Stellgröße zugelassen wird. Auf Basis dieser Ansätze wurden verschiedene Verfahren entwickelt, beispielsweise [1; 2; 6; 10].

In diesem Artikel wird eine Methode vorgestellt, welche einen nichtlinearen Ansatz zur Regelung von Systemen mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen verwendet. Dabei wird sowohl die Sättigung der Stellgröße als auch der Stellrate zugelassen. Die Methode basiert auf der weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen [1; 2].

Zunächst wird in Abschnitt 2 das Modell für ein Stellglied beschrieben, welches hinsichtlich Stellgröße und Stellrate begrenzt ist. In Abschnitt 3 werden

dann Bedingungen für ein allgemeines eingangslinares System unter Verwendung eines Stellglieds nach Abschnitt 2 hergeleitet. Als Spezialfall wird auf Systeme mit linearer Dynamik eingegangen. Für diese Systemklasse wird in Abschnitt 4 eine weiche strukturvariable Regelung vorgestellt. Anschließend erfolgt die Herleitung von Entwurfsbedingungen für einen solchen Regler unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen. Den Abschluss bildet schließlich die Angabe konvexer Entwurfsbedingungen auf Basis von linearen Matrixungleichungen (LMI)<sup>1</sup>. Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens wird in Abschnitt 5 anhand eines Beispiels gezeigt.

## 2 Modell des Aktors

Betrachtet wird ein lineares System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u_A. \quad (1)$$

Ein Stellglied, welches gemäß Bild 1 modelliert wird, liefert die Eingangsgröße  $u_A$  des Systems. Das Stellglied unterliegt einer Stellgrößenbegrenzung  $|u_A| \leq 1$  sowie einer Stellratenbegrenzung  $|\dot{u}_A| \leq 1$ . Die Funktion  $\sigma(u) = \text{sgn}(u) \min(1, |u|)$  bezeichnet im Folgenden die auf eins normierte Sättigungsfunktion. Die Differentialgleichung des Aktormodells lautet nun:

$$\dot{u}_A = \sigma(\tau(\sigma(u) - u_A)). \quad (2)$$

Dieses Modell wird ebenfalls in [4], [7] und [15] verwendet. Im stationären Fall gilt  $\sigma(u) = u_A$  und  $u_A$  ist ebenfalls auf eins beschränkt. Für  $\tau \rightarrow \infty$  ergibt sich der ideale Stellratenbegrenzer.

Um die Dynamik des Gesamtsystems bestehend aus Strecke (1) und Aktormodell (2) analysieren zu können, wird der Zustandsvektor erweitert zu  $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T \ u_A]^T$ . Die Rückführung von  $u_A$  im Aktor kann mit Hilfe der Zustandsrückführung  $\mathbf{k}_R^T \tilde{\mathbf{x}}$  berücksichtigt werden. Mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_R = [\mathbf{0}^T \ -\tau]^T \quad (3)$$

und  $d = \tau$  ergibt sich ein System mit geschachtelter Sättigung

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}} \sigma(\mathbf{k}_R^T \tilde{\mathbf{x}} + d\sigma(u)). \quad (4)$$

Von eins verschiedene Begrenzungen und/oder von eins verschiedene Steigungen der Sättigungsfunktionen

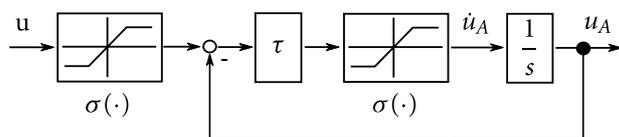


Bild 1 Aktor mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkung.

<sup>1</sup> Für eine Einführung in LMIs siehe beispielsweise [5].

können im Parameter  $d$  und der Eingangsmatrix  $\tilde{\mathbf{b}}$  berücksichtigt werden. Es wird vorausgesetzt, dass Systemzustand  $\mathbf{x}$  und Aktorausgang  $u_A$  gemessen werden, also der gesamte erweiterte Zustand  $\tilde{\mathbf{x}}$  verfügbar ist.

## 3 Stabilität von Systemen unter geschachtelter Sättigung

Nun wird ein Satz über die Stabilität von Systemen der Form (4) unter einer Zustandsrückführung angegeben. Dieser ist leicht auf nichtlineare Systeme mit  $m$  Eingangsgrößen erweiterbar. Daher wird zunächst der Stabilitätssatz für diesen allgemeinen Fall eines Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_2\sigma(\mathbf{k}_2(\mathbf{x}))) \quad (5)$$

mit den Zustandsrückführungen  $\mathbf{k}_1(\mathbf{x}), \mathbf{k}_2(\mathbf{x})$  angegeben und bewiesen, wobei  $\sigma(\cdot) = [\sigma(\cdot) \dots \sigma(\cdot)]^T$  eine  $m$ -dimensionale, normierte Sättigungsfunktion ist. Von eins verschiedene Sättigungsniveaus werden in den Diagonalmatrizen  $\mathbf{D}_i = \text{diag}(d_{i1}, \dots, d_{im})$  berücksichtigt.

Das System (4) ist ein Spezialfall des Systems (5) für  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  und  $\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_R^T \mathbf{x}$ .

Zur Angabe eines Stabilitätssatzes wird das Gebiet

$$\mathcal{G}(\rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq \rho\} \quad (6)$$

benötigt. Darin ist  $\rho$  ein positiver Skalar,  $n$  ist die Ordnung des Systems (5) und  $V(\mathbf{x})$  eine positiv definite Funktion, d. h.  $V(\mathbf{x}) > 0$  für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  und  $V(\mathbf{0}) = 0$ .

**Definition 1.** Das abgeschlossene Gebiet  $\mathcal{G}(\rho)$  heißt kontraktiv invariant für ein System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , wenn  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\rho) \setminus \{\mathbf{0}\}$  gilt.

Zur Verkürzung der Schreibweise wird im Folgenden der Gradient  $\nabla V = \partial V(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$  genutzt. Das Gebiet (6) ist demnach kontraktiv invariant, d. h., es bildet ein Einzugsgebiet, falls  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ , also

$$\nabla V \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_2\sigma(\mathbf{k}_2(\mathbf{x})))) < 0, \quad (7)$$

gilt. Zur Sicherstellung der Kontraktivität von  $\mathcal{G}(\rho)$  wird die Menge  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^m : v_i \in \{1, 2, 3\}\}$  benötigt. Sie dient dazu, einzelne Elemente der Vektoren  $\mathbf{w}_i(\mathbf{x})$  auszuwählen und den Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1(\mathbf{x}), \mathbf{w}_2(\mathbf{x}), \mathbf{w}_3(\mathbf{x})) &= \text{diag}\{\delta(v_1 - 1), \delta(v_2 - 1), \dots, \delta(v_m - 1)\} \mathbf{w}_1(\mathbf{x}) \\ &+ \text{diag}\{\delta(v_1 - 2), \delta(v_2 - 2), \dots, \delta(v_m - 2)\} \mathbf{w}_2(\mathbf{x}) \\ &+ \text{diag}\{\delta(v_1 - 3), \delta(v_2 - 3), \dots, \delta(v_m - 3)\} \mathbf{w}_3(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

mit

$$\delta(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = 0 \\ 0, & \text{falls } j \neq 0 \end{cases}$$

zu definieren. Des Weiteren wird das Gebiet

$$\mathcal{L}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{x} : |h_j(\mathbf{x})| \leq 1, j = 1, 2, \dots, m\}$$

benötigt, in welchem eine Zustandsrückführung  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  nicht sättigt, d. h., die Begrenzung  $|h_j(\mathbf{x})| \leq 1$  nicht verletzt. Die Zustandsrückführungen  $\mathbf{h}_i(\mathbf{x})$  werden als virtuelle Zustandsrückführungen zur Sicherung der Stabilität benötigt. Nun kann ein Satz zur Sicherstellung der kontraktiven Invarianz von  $\mathcal{G}(\rho)$  angegeben werden.

**Satz 1.** Gegeben sei das Gebiet  $\mathcal{G}(\rho)$  und das System (5). Falls  $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x})$  existieren, so dass

$$\nabla V \cdot [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{v}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_2\mathbf{h}_2(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_2\mathbf{k}_2(\mathbf{x}))] < 0 \quad (8)$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  und  $\mathcal{G}(\rho) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x})) \cap \mathcal{L}(\mathbf{h}_2(\mathbf{x}))$  gilt, dann ist  $\mathcal{G}(\rho)$  kontraktiv invariant für das System (5).

*Beweis.* Der Beweis von Satz 1 erfolgt, ähnlich wie in [4] für Systeme mit linearer Dynamik und linearen Zustandsrückführungen, anhand einer oberen Abschätzung von  $\dot{V}(\mathbf{x})$ . Gleichung (7) kann umgeschrieben werden zu

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \sigma(k_{1i}(\mathbf{x}) + d_{2i} \sigma(k_{2i}(\mathbf{x}))) < 0, \quad (9)$$

wobei  $d_{ij}$  das  $j$ -te Diagonalelement von  $\mathbf{D}_i$  bezeichnet. Zur kompakteren Darstellung werden die Funktionen  $f_i(\mathbf{x}) = k_{1i}(\mathbf{x}) + d_{2i} \sigma(k_{2i}(\mathbf{x}))$  definiert.

Der Vektor  $\mathbf{b}_i(\mathbf{x})$  bezeichnet die  $i$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ . Nun werden unter Berücksichtigung von  $\mathcal{G}(\rho) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x})) \cap \mathcal{L}(\mathbf{h}_2(\mathbf{x}))$  die Fälle betrachtet, in denen  $f_i(\mathbf{x})$  sättigt, d. h.,  $|f_i(\mathbf{x})| \geq 1$ :

- $\nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \geq 0$  und:  
 $f_i(\mathbf{x}) \leq -1$ , dann  $\nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \sigma(f_i(\mathbf{x})) \leq \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) h_{1i}(\mathbf{x})$ ,  
 $f_i(\mathbf{x}) \geq 1$ , dann  $\nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \sigma(f_i(\mathbf{x})) \leq \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$ ,
- $\nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \leq 0$  und:  
 $f_i(\mathbf{x}) \geq 1$ , dann  $\nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \sigma(f_i(\mathbf{x})) \leq \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) h_{1i}(\mathbf{x})$ ,  
 $f_i(\mathbf{x}) \leq -1$ , dann  $\nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \sigma(f_i(\mathbf{x})) \leq \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$ .

Im ungesättigten Fall gilt  $\sigma(f_i(\mathbf{x})) = f_i(\mathbf{x})$ . Die Kombination aller Fälle liefert

$$\nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \sigma(f_i(\mathbf{x})) \leq \max \{ \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) h_{1i}(\mathbf{x}), \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) \}. \quad (10)$$

Mit der Funktion  $\sigma(k_{2i}(\mathbf{x}))$  aus (9) wird in gleicher Weise verfahren und man erhält unter Verwendung von (10) schließlich als hinreichende Bedingung für die kontraktive Invarianz von  $\mathcal{G}(\rho)$

$$\nabla V \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \max \{ \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) h_{1i}(\mathbf{x}), \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) (k_{1i}(\mathbf{x}) + d_{2i} h_{2i}(\mathbf{x})), \nabla V \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) (k_{1i}(\mathbf{x}) + d_{2i} k_{2i}(\mathbf{x})) \} < 0. \quad (11)$$

Sind alle Argumente der Maximumfunktion negativ, so ist auch das Maximum der Argumente negativ. Dies wird in Satz 1 unter Verwendung des Vektors  $\mathbf{m}(\mathbf{v}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_2\mathbf{h}_2(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_2\mathbf{k}_2(\mathbf{x}))$  ausgenutzt. Da (8) für alle möglichen  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  überprüft wird, ist Forderung (11) sicher erfüllt, wenn (8) gilt.  $\square$

Aus Satz 1 ergibt sich im Fall eines Systems mit linearer Dynamik und linearen Zustandsrückführungen der Stabilitätssatz aus [4]. Für den Entwurf sättigender linearer Zustandsrückführungen, im Folgenden als Sättigungsregler bezeichnet, wird auf [4] verwiesen.

Eine lineare Zustandsrückführung hat den Nachteil, dass der Stellbereich für Zustände nahe der Ruhelage nur schlecht ausgenutzt wird. Die Verwendung eines nichtlinearen Reglers  $u = k_S(\bar{\mathbf{x}})$  kann diesem Effekt entgegenwirken. Für diesen Spezialfall eines Systems (4) mit linearer Dynamik und einer Eingangsgröße lässt sich der folgende Satz angeben:

**Satz 2.** Gegeben sei die Regelstrecke  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}\sigma(\mathbf{k}_R^T \bar{\mathbf{x}} + d\sigma(u))$ , das Regelgesetz  $u = k_S(\bar{\mathbf{x}})$  und das Gebiet

$$\mathcal{G}(\rho) = \{ \bar{\mathbf{x}} : V(\bar{\mathbf{x}}) \leq \rho \}.$$

Wenn die virtuellen Zustandsrückführungen  $h_R(\bar{\mathbf{x}})$  und  $h_S(\bar{\mathbf{x}})$  existieren, so dass für alle  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}(\rho)$

$$\nabla V \cdot (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}h_R(\bar{\mathbf{x}})) < 0, \quad (12)$$

$$\nabla V \cdot (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_R^T \bar{\mathbf{x}} + d h_S(\bar{\mathbf{x}}))) < 0, \quad (13)$$

$$\nabla V \cdot (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_R^T \bar{\mathbf{x}} + d k_S(\bar{\mathbf{x}}))) < 0 \quad (14)$$

und  $\mathcal{G}(\rho) \subseteq \mathcal{L}(h_R(\bar{\mathbf{x}})) \cap \mathcal{L}(h_S(\bar{\mathbf{x}}))$  gilt, dann ist  $\mathcal{G}(\rho)$  kontraktiv invariant für die Regelstrecke unter Verwendung des Regelgesetzes  $u = k_S(\bar{\mathbf{x}})$ .

*Beweis.* Satz 2 folgt unmittelbar aus Satz 1 für ein System unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung mit linearer Dynamik und einem Eingang, d. h.  $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{b}}$  und  $\mathbf{k}_1(\bar{\mathbf{x}}) = k_1(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}_R^T \bar{\mathbf{x}}$ .  $\square$

Nach Satz 2 müssen die drei Systeme  $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}h_R(\bar{\mathbf{x}})$ ,  $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_R^T \bar{\mathbf{x}} + d h_S(\bar{\mathbf{x}}))$  und  $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_R^T \bar{\mathbf{x}} + d k_S(\bar{\mathbf{x}}))$  eine gemeinsame Ljapunov-Funktion besitzen. Dieses Ergebnis wird im nächsten Abschnitt verwendet, um eine nichtlineare Regelung für das System (4) anzugeben.

## 4 Weiche strukturvariable Regelungen

Für Systeme (1), die ausschließlich einer Stellgrößenbeschränkung  $|u_A| \leq 1$  unterworfen sind, wird in [1;2] die weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen (iWSVR) angegeben. Bei ihr wird durch Variation der Reglerparameter in Abhängigkeit vom Systemzustand die Stellgrößenbegrenzung gut ausgenutzt, was kurze Ausregelzeiten ermöglicht. Eine weitere Verbesserung des Ausregelverhaltens ist durch die zusätzliche Verwendung sättigender Regelgesetze erreichbar [10].

Es liegt nahe, dass auch im Falle einer zusätzlichen Stellratenbeschränkung eine iWSVR Vorteile aufweist. Dazu werden zunächst die Grundlagen des Verfahrens erläutert, bevor die Anpassung auf Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen vorgenommen wird. Die abschließende Formulierung der Nebenbedingungen als LMIs ermöglicht einen einfachen Entwurf.

### 4.1 Weiche implizite strukturvariable Regelung

Für Systeme mit linearer Dynamik werden in [1;2] Bedingungen zum Entwurf einer weichen strukturvariablen Regelung hergeleitet. Dabei wird die Charakteristik des Aktors nur durch die Stellgrößenbeschränkung  $|u_A| \leq 1$  abgebildet, d.h.  $u_A = \sigma(u)$ . Eine zusätzliche Beschränkung der Stellrate wird nicht berücksichtigt.

Bei einer weichen strukturvariablen Regelung wird der Regler im Verlauf des Ausregelvorgangs abhängig von einem Auswahlparameter  $v \in (0, \bar{v}]$

$$u = k_S(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}_S^T(v)\mathbf{x}$$

variiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $\bar{v} = 1$  festgelegt werden.

Für jeden Regelkreis  $\hat{\mathbf{A}}(v) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_S^T(v)$  wird ein kontraktiv invariantes Gebiet  $\mathcal{G}(v)$  bestimmt. Diese Gebiete sind infinitesimal dicht zu schachteln, d.h.,  $\mathcal{G}(v - \epsilon) \subset \mathcal{G}(v)$  gilt für ein beliebig kleines  $\epsilon > 0$ .

Die Gebiete  $\mathcal{G}(v)$  werden mit einer Funktion  $g(v, \mathbf{x})$  als

$$\mathcal{G}(v) = \{\mathbf{x} : g(v, \mathbf{x}) < 0\} \tag{15}$$

definiert. Der Regler  $\mathbf{k}_S(v)$  wird beim Eintritt der Trajektorie in das Gebiet  $\mathcal{G}(v)$  aktiviert, d.h., wenn  $\mathbf{x}(t)$  auf dem Rand des Gebietes  $\partial\mathcal{G}(v) = \{\mathbf{x} : g(v, \mathbf{x}) = 0\}$  liegt. Der Auswahlparameter  $v$  ist daher durch die Gleichung

$$g(v, \mathbf{x}) = 0 \tag{16}$$

implizit definiert. Er nimmt entlang jeder Trajektorie ab und ist daher eine implizite Ljapunov-Funktion für das geregelte System. Ein Strukturbild einer weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen zeigt Bild 2.

Ist die Selektionsstrategie (16) hinsichtlich  $v$  eindeutig lösbar, ist jedem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$  eindeutig ein Regler  $\mathbf{k}_S(v)$  zugeordnet. Außerdem ist  $g(v, \mathbf{x})$  so zu wählen, dass die Regelung stabil ist. Der folgende in [3] angegebene Satz über implizite Ljapunov-Funktionen liefert Bedingungen, welche  $g(v, \mathbf{x})$  erfüllen muss, damit die zuvor genannten Forderungen sichergestellt sind.

**Satz 3 ([3]).** Die Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung  $\mathcal{U}_1$  des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Es existiere in einem Gebiet

$$\mathcal{H} = \{(v, \mathbf{x}) : 0 < v < \bar{v}, \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

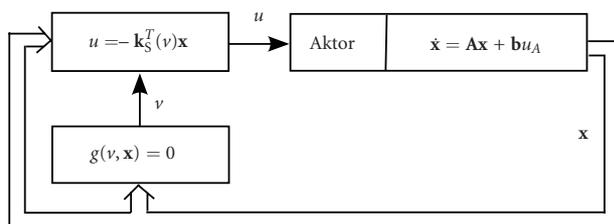


Bild 2 Strukturbild einer weichen strukturvariablen Regelung.

wobei  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$  eine Umgebung des Ursprungs ist, eine stetige Funktion  $g(v, \mathbf{x})$ , so dass gilt

1. Für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  resultiert aus  $g(v, \mathbf{x}) = 0$  der Grenzübergang  $v \rightarrow 0+$ ,
2.  $\lim_{v \rightarrow 0+} g(v, \mathbf{x}) > 0$  und  $\lim_{v \rightarrow \bar{v}-} g(v, \mathbf{x}) < 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

Sind dann in  $\mathcal{H}$  die beiden Bedingungen

3.  $-\infty < \underline{D}_v g(v, \mathbf{x})$  und  $\bar{D}_v g(v, \mathbf{x}) < 0$  für alle  $(v, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$

4.  $\bar{D}_t g(v, \mathbf{x}(t)) < 0$  für alle  $(v, \mathbf{x})$  mit  $g(v, \mathbf{x}) = 0$

erfüllt, so ist die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  asymptotisch stabil. Des Weiteren ist durch die Gleichung  $g(v, \mathbf{x}) = 0$  in  $\mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$  eine Funktion  $v$  implizit definiert, die in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  durch  $v(\mathbf{0}) = 0$  stetig erweiterbar ist. Diese erweiterte Funktion ist in  $\mathcal{U}_0$  eine Ljapunov-Funktion für das System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

Dabei bezeichnen  $\bar{D}_t g(v, \mathbf{x}(t))$  und  $\bar{D}_v g(v, \mathbf{x})$  die oberen Dini-Derivierten und  $\underline{D}_v g(v, \mathbf{x})$  die untere Dini-Derivierte. Für den Beweis sei auf [3] verwiesen.

Sind die Bedingungen von Satz 3 erfüllt, so ist  $v$  eine Ljapunov-Funktion und eindeutig aus (16) bestimmbar. Die Gebiete  $\mathcal{G}(v)$  sind dann kontraktiv invariant, d.h., eine Trajektorie, die in das Gebiet einläuft, kann es im weiteren Verlauf nicht wieder verlassen. Aus diesem Grunde ist ein Gleitzustand nicht möglich. Stattdessen werden im Verlauf des Ausregelvorgangs mit fallendem  $v$  immer schnellere Regler aktiviert.

### 4.2 Weiche implizite strukturvariable Regelung mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung

Nun erfolgt die Erweiterung der iWSVR auf das System (4) mit dem erweiterten Zustandsvektor  $\bar{\mathbf{x}}$ . Es wird davon ausgegangen, dass das Paar  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}})$  vollständig steuerbar ist und in Regelungsnormform transformiert werden kann. Es liegt dann in der Form

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

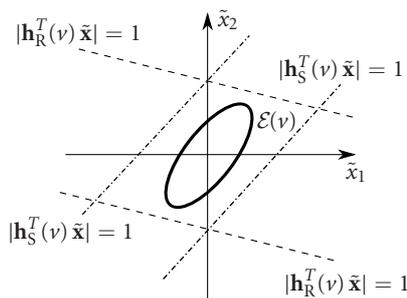
vor. Zu beachten ist, dass auch die Aktorrückführung  $\mathbf{k}_R$  transformiert werden muss. Gemäß der Bedingungen (12), (13) und (14) für sättigende nichtlineare Regler aus Satz 2, werden zum Nachweis der Stabilität die nicht sättigenden virtuellen Zustandsrückführungen  $h_S(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}_S^T(v)\bar{\mathbf{x}}$  und  $h_R(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}_R^T(v)\bar{\mathbf{x}}$  benötigt. Die Selektionsstrategie ist demnach so zu wählen, dass diese Regler nicht sättigen. Für die Regelung selbst wird dann der sättigende Regler  $\mathbf{k}_S(v)$  eingesetzt.

Die Eigenwerte  $\lambda_i(v)$  der Systemmatrizen

$$\hat{\mathbf{A}}_R(v) = \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{h}_R^T(v), \tag{18}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_S(v) = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_R^T - d\mathbf{h}_S^T(v)), \tag{19}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_*(v) = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_R^T - d\mathbf{k}_S^T(v)) \tag{20}$$



**Bild 3** Ellipse  $\mathcal{E}(v)$  mit den Geraden der Stellgrößenbegrenzung  $|\mathbf{h}_S^T(v)\bar{\mathbf{x}}| = 1$  und der Stellratenbeschränkung  $|\mathbf{h}_R^T(v)\bar{\mathbf{x}}| = 1$ .

werden mit fallendem  $v$  auf Strahlen gemäß

$$\lambda_i(v) = \frac{1}{v} \lambda_i(1) \quad (21)$$

nach links verschoben. Um  $\mathbf{k}_R$  und  $d$  aus (18)–(20) zu eliminieren, werden die Zustandsrückführungen

$$\mathbf{h}_R(v) = \mathbf{D}^{-1}(v)\hat{\mathbf{a}}_R - \mathbf{a}, \quad (22)$$

$$\mathbf{h}_S(v) = \mathbf{D}^{-1}(v)\hat{\mathbf{a}}_S - \frac{1}{d}(\mathbf{a} - \mathbf{k}_R), \quad (23)$$

$$\mathbf{k}_S(v) = \mathbf{D}^{-1}(v)\hat{\mathbf{a}}_* - \frac{1}{d}(\mathbf{a} - \mathbf{k}_R) \quad (24)$$

mit  $\mathbf{D}(v) = \text{diag}(v^n, \dots, v^2, v)$  verwendet. Der Vektor  $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]^T$  umfasst die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von  $\hat{\mathbf{A}}$ , die Vektoren  $\hat{\mathbf{a}}_R$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_S$  und  $\hat{\mathbf{a}}_*$  umfassen die Koeffizienten der charakteristischen Polynome von  $\hat{\mathbf{A}}_R(1)$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_S(1)$  und  $\hat{\mathbf{A}}_*(1)$ . Durch Einsetzen von (22)–(24) in (18)–(20) ergeben sich aufgrund der Regelungsnormalform von  $\hat{\mathbf{A}}$  die Systemmatrizen

$$\hat{\mathbf{A}}_R(v) = \frac{1}{v} \mathbf{D}(v)\hat{\mathbf{A}}_R(1)\mathbf{D}^{-1}(v), \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_S(v) = \frac{1}{v} \mathbf{D}(v)\hat{\mathbf{A}}_S(1)\mathbf{D}^{-1}(v), \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_*(v) = \frac{1}{v} \mathbf{D}(v)\hat{\mathbf{A}}_*(1)\mathbf{D}^{-1}(v). \quad (27)$$

Zur Konstruktion der invarianten Gebiete  $\mathcal{G}(v)$  werden Ellipsen  $\mathcal{E}(v) = \{\bar{\mathbf{x}}: \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(v)\bar{\mathbf{x}} - 1 < 0\}$  mit positiv definiten Matrix

$$\mathbf{R}(v) = \mathbf{D}^{-1}(v)\mathbf{R}_1\mathbf{D}^{-1}(v) \quad (28)$$

verwendet. Um sicherzustellen, dass die Hilfsregler  $\mathbf{h}_S(v)$  und  $\mathbf{h}_R(v)$  innerhalb der Gebiete  $\mathcal{G}(v)$  die Stellraten- bzw. Stellgrößenbegrenzungen optimal ausnutzen ohne diese zu verletzen, wird die Ellipse mittels einer Skalierungsfunktion  $e(v)$  geeignet skaliert. Es ergeben sich somit Gebiete der Form

$$\mathcal{G}(v) = \{\bar{\mathbf{x}}: e(v)\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(v)\bar{\mathbf{x}} - 1 < 0\}. \quad (29)$$

Dabei ist die Forderung  $\mathcal{G}(v) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{h}_R(v)) \cap \mathcal{L}(\mathbf{h}_S(v))$  einzuhalten. Bild 3 veranschaulicht die Überlegung zur Wahl der Skalierungsfunktion. Ist ein System ausschließlich ei-

ner Begrenzung der Stellgröße unterworfen, wird die in [1] eingeführte Skalierungsfunktion der Form

$$e_S(v) = \mathbf{h}_S^T(v)\mathbf{R}^{-1}(v)\mathbf{h}_S(v) \quad (30)$$

verwendet. Diese wird gerade so gewählt, dass die Stellgrößenbegrenzung  $|\mathbf{h}_S^T(v)\bar{\mathbf{x}}| = 1$  tangiert, aber nicht verletzt wird. Bild 3 zeigt, dass die Ellipse durch die modifizierte Skalierungsfunktion gerade soweit vergrößert werden darf, bis sie an die restriktivere Begrenzung stößt. Führt man hinsichtlich der Stellratenbegrenzung die Skalierungsfunktion

$$e_R(v) = \mathbf{h}_R^T(v)\mathbf{R}^{-1}(v)\mathbf{h}_R(v) \quad (31)$$

ein, so ergibt sich die modifizierte Skalierungsfunktion

$$e(v) = \max(e_S(v), e_R(v)), \quad (32)$$

woraus die Auswahlstrategie

$$g(v, \bar{\mathbf{x}}) = \max(e_S(v), e_R(v)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(v)\bar{\mathbf{x}} - 1 = 0 \quad (33)$$

resultiert. Die Rückführung  $u = -\mathbf{k}_S^T(v)\bar{\mathbf{x}}$  mit dem Auswahlgesetz (33) stabilisiert dann das System (4), sofern die Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt sind.

**Satz 4.** Es wird die Regelstrecke  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}\sigma(\mathbf{k}_R^T \bar{\mathbf{x}} + d\sigma(u))$  mit der Rückführung

$$u = -\mathbf{k}_S^T(v)\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k}_S(v) = \mathbf{D}^{-1}(v)\hat{\mathbf{a}}_* - \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{k}_R)}{d} \quad (34)$$

und der Selektionsstrategie

$$g(v, \bar{\mathbf{x}}) = \max(e_S(v), e_R(v)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(v)\bar{\mathbf{x}} - 1 = 0 \quad (35)$$

betrachtet. Wenn die Bedingungen

$$\mathbf{R}_1 \succ 0, \quad (36a)$$

$$\max_{v \in (0,1]} e'_R(v) \leq 0, \quad (36b)$$

$$\max_{v \in (0,1]} e'_S(v) \leq 0, \quad (36c)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N} \prec 0, \quad (36d)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{R,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{R,1} \prec 0, \quad (36e)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{S,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{S,1} \prec 0, \quad (36f)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} \prec 0 \quad (36g)$$

mit  $\mathbf{N} = \text{diag}(-n, \dots, -1)$  erfüllt sind, wobei

$$\hat{\mathbf{A}}_{R,1} = \hat{\mathbf{A}}_R(1) = \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{a}}_R - \mathbf{a})^T, \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{S,1} = \hat{\mathbf{A}}_S(1) = \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{b}}(d\hat{\mathbf{a}}_S - \mathbf{a})^T, \quad (38)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{*,1} = \hat{\mathbf{A}}_*(1) = \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{b}}(d\hat{\mathbf{a}}_* - \mathbf{a})^T \quad (39)$$

gilt und  $n$  die Ordnung des erweiterten Systems (4) ist, dann stabilisiert die Rückführung (34) das System für alle  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}(1)$ .

**Beweis.** Es ist zu zeigen, dass bei Erfüllung der Bedingungen von Satz 4 durch  $g(v, \bar{\mathbf{x}}) = 0$  eine Ljapunov-Funktion implizit definiert ist, die nach Satz 2 eine gemeinsame

Ljapunov-Funktion für die Systemmatrizen (25)–(27) ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Forderungen aus Satz 2 und 3 erfüllt sind.

Zunächst werden die Forderungen aus Satz 3 betrachtet: Die Definition der kontraktiv invarianten Gebiete nach (29) mit der positiv definiten Matrix  $\mathbf{R}(\nu)$  nach (28) führt in Satz 4 zu Forderung (36a).

Mit  $\bar{\nu} = 1$  ergeben sich somit die Gebiete

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{G}(1) = \{\bar{\mathbf{x}} : \max(e_S(1), e_R(1)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(1) \bar{\mathbf{x}} - 1 < 1\}$$

$$\mathcal{H} = \{(\nu, \bar{\mathbf{x}}) : 0 < \nu < 1, \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

Nach Bedingung 1 muss die Funktion  $g(\nu, \bar{\mathbf{x}})$  die Eigenschaft aufweisen, dass für  $\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}$  der Grenzübergang  $\nu \rightarrow 0+$  aus  $g(\nu, \bar{\mathbf{x}}) = 0$  resultiert. Da  $\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}}$  stetig und  $\max(e_S(\nu), e_R(\nu))$  Lipschitz-stetig ist (siehe Anhang), ist  $g(\nu, \bar{\mathbf{x}})$  ebenfalls stetig für alle  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Durch  $g(\nu, \bar{\mathbf{x}}) = 0$  ist demnach eine stetige Funktion  $\nu(\bar{\mathbf{x}})$  definiert und  $\nu(\bar{\mathbf{x}})$  ist in  $\nu(\mathbf{0})$  stetig bzw. stetig erweiterbar.

Nun ist Bedingung 2 aus Satz 3 zu betrachten: Es gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow 0+} [\max(e_S(\nu), e_R(\nu)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} - 1] = \infty$$

für alle  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Damit ist der erste Teil  $\lim_{\nu \rightarrow 0+} g(\nu, \bar{\mathbf{x}}) > 0$  von Bedingung 2 erfüllt. Als Grenzwert für  $\nu \rightarrow 1$  – ergibt sich

$$\lim_{\nu \rightarrow 1-} [\max(e_S(\nu), e_R(\nu)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} - 1]$$

$$= \max(e_S(1), e_R(1)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(1) \bar{\mathbf{x}} - 1.$$

Da für alle  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}(1)$   $\max(e_S(1), e_R(1)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(1) \bar{\mathbf{x}} < 1$  gilt, ist damit auch der zweite Teil  $\lim_{\nu \rightarrow 1-} g(\nu, \bar{\mathbf{x}}) < 0$  von Bedingung 2 aus Satz 3 erfüllt.

Bedingung 3 fordert, dass  $-\infty < \underline{D}_\nu g(\nu, \bar{\mathbf{x}})$  und  $\bar{D}_\nu g(\nu, \bar{\mathbf{x}}) < 0$  gilt. In Bezug auf (35) ergeben sich

$$-\infty < \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} \underline{D}_\nu \max(e_S(\nu), e_R(\nu))$$

$$+ \max(e_S(\nu), e_R(\nu)) \underline{D}_\nu \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}}, \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} \bar{D}_\nu \max(e_S(\nu), e_R(\nu))$$

$$+ \max(e_S(\nu), e_R(\nu)) \bar{D}_\nu \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} < 0. \quad (41)$$

Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von  $\max(e_S(\nu), e_R(\nu))$  sind nach [9] die Dini-Derivierten  $\underline{D}_\nu \max(e_S(\nu), e_R(\nu))$  endlich. Da  $\mathbf{R}(\nu)$  für alle  $\nu \in (0, 1]$  stetig differenzierbar ist, kann  $\bar{D}_\nu \mathbf{R}(\nu)$  durch die partielle Ableitung

$$\bar{D}_\nu \mathbf{R}(\nu) = \frac{\partial \mathbf{R}(\nu)}{\partial \nu}$$

ersetzt werden. Nach [9] sind in diesem Fall die Dini-Derivierten von  $\mathbf{R}(\nu)$  ebenfalls beschränkt und (40) wird eingehalten.

Forderung (41) ist erfüllt, wenn sowohl  $\bar{D}_\nu \max(e_S(\nu), e_R(\nu)) \leq 0$  als auch  $\bar{D}_\nu \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} < 0$  gelten. Nach [9] ist

$\bar{D}_\nu \max(e_S(\nu), e_R(\nu)) \leq 0 \quad \forall \nu \in (0, 1]$ , wenn  $\max(e_S(\nu), e_R(\nu))$  eine monoton fallende Funktion ist. Dies ist der Fall, sofern (36b) und (36c) erfüllt sind. Die verbleibende Bedingung  $\bar{D}_\nu \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} < 0$  lautet

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\nu)}{\partial \nu} = \frac{1}{\nu} \mathbf{D}^{-1}(\nu) (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \mathbf{D}^{-1}(\nu) < 0$$

und wird durch (36d) sichergestellt.

Damit die Stabilität des Systems unter der Zustandsrückführung (34) garantiert ist, müssen die Systemmatrizen (22), (23) und (24) eine gemeinsame Ljapunov-Funktion besitzen, die implizit durch das Auswahlgesetz  $g(\nu, \bar{\mathbf{x}}) = 0$  definiert ist. Dies ist der Fall, wenn Bedingung 4 von Satz 3,  $\bar{D}_t g(\nu, \bar{\mathbf{x}}(t)) < 0$ , für alle Systemmatrizen (25)–(27) gilt. Da  $g(\nu, \bar{\mathbf{x}})$  hinsichtlich  $\bar{\mathbf{x}}$  und damit auch hinsichtlich der Zeit stetig differenzierbar ist, kann die obere Dini-Derivierte durch die zeitliche Ableitung ersetzt werden und es ergibt sich

$$\max(e_R(\nu), e_S(\nu)) \left( \dot{\bar{\mathbf{x}}}^T \mathbf{R}(\nu) \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(\nu) \dot{\bar{\mathbf{x}}} \right) < 0.$$

Durch Einsetzen von  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  unter Verwendung von (25)–(27) ergeben sich unter Berücksichtigung von  $\max(e_R(\nu), e_S(\nu)) > 0$  die drei Forderungen

$$\frac{1}{\nu} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}^{-1}(\nu) \left( \hat{\mathbf{A}}_{R,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{R,1} \right) \mathbf{D}^{-1}(\nu) \bar{\mathbf{x}} < 0, \quad (42)$$

$$\frac{1}{\nu} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}^{-1}(\nu) \left( \hat{\mathbf{A}}_{S,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{S,1} \right) \mathbf{D}^{-1}(\nu) \bar{\mathbf{x}} < 0, \quad (43)$$

$$\frac{1}{\nu} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}^{-1}(\nu) \left( \hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} \right) \mathbf{D}^{-1}(\nu) \bar{\mathbf{x}} < 0. \quad (44)$$

Die Bedingungen (42)–(44) werden durch die Bedingungen (36e)–(36g) in Satz 4 berücksichtigt. Satz 4 sichert also alle Bedingungen aus Satz 2 und Satz 3.  $\square$

Die Entwurfsbedingungen einer iWSVR für ein System mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung sind daher (36a)–(36g). Zur Sicherstellung, dass das Regelgesetz für alle Anfangszustände der Menge  $\mathcal{X}_0$  gültig ist, dient die Forderung

$$g(1, \bar{\mathbf{x}}) < 0 \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_0. \quad (45)$$

*Bemerkung:* Das Regelgesetz enthält Terme  $\nu^{-n}$ , die für kleine Werte von  $\nu$  zu numerischen Problemen führen. Daher wird ein Minimalwert  $\nu_{\min} > 0$  festgelegt. Wird dieser erreicht, arbeitet der Regler linear mit  $\mathbf{k}_S(\nu_{\min})$ .

### 4.3 LMI-Formulierung der Nebenbedingungen

Der Entwurf einer impliziten iWSVR besteht aus der Wahl der Parameter  $\mathbf{R}_1$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_*$  und der Hilfsgrößen  $\hat{\mathbf{a}}_S$  und  $\hat{\mathbf{a}}_R$ . Diese müssen die Nebenbedingungen (36a)–(36g) und (45) erfüllen und sollen so gewählt werden, dass ein gutes Regelverhalten erzielt wird. Zur Optimierung kann ein beliebiges Suchverfahren wie beispielsweise eine Evolutionsstrategie verwendet werden. Leider ist dieses Vorgehen sehr zeitaufwändig, weshalb die Formulierung

eines konvexen Optimierungsproblems wünschenswert ist. Daher werden im Folgenden die Entwurfsbedingungen aus Satz 4 als lineare Matrixungleichungen (LMIs) in den Variablen

$$\mathbf{y}_R = \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}}_R, \quad \mathbf{y}_S = \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}}_S, \quad \mathbf{z} = \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}}_*, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1} \quad (46)$$

angegeben. Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{A}_0 = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}} \mathbf{a}^T, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{k}_R}{d}, \quad (47)$$

$$\mathbf{P}(l, k) = \begin{cases} \prod_{q=0}^{k-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] & \text{für } k \neq 0 \\ \mathbf{I} & \text{für } k = 0 \end{cases}, \quad (48)$$

wobei  $\mathbf{M} = \text{diag}(0, 1, \dots, n-1)$  ist, ergibt sich:

**Satz 5.** Gegeben sei ein System  $\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{b}} \sigma(\mathbf{k}_R^T \mathbf{x} + d\sigma(u))$ . Der Regler (34) mit der Selektionsstrategie (35) stabilisiert das System (4) für alle  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}(1)$ , wenn die LMIs

$$\mathbf{Q} \succ 0, \quad (49a)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{Q} \prec 0, \quad (49b)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{y}_R^T - \mathbf{y}_R\bar{\mathbf{b}}^T \prec 0, \quad (49c)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{y}_S^T - \mathbf{y}_S\bar{\mathbf{b}}^T \prec 0, \quad (49d)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{z}^T - \mathbf{z}\bar{\mathbf{b}}^T \prec 0, \quad (49e)$$

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{P}(0, i-k) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{P}(0, k) \mathbf{a} - \mathbf{y}_R^T \mathbf{N} \mathbf{P}(n, i) \mathbf{a} \geq 0 \quad (49f)$$

für alle  $i \in \{0, 1, \dots, m_R\}$  und

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}_0^T \mathbf{P}(0, i-k) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{P}(0, k) \mathbf{a}_0 - \mathbf{y}_S^T \mathbf{N} \mathbf{P}(n, i) \mathbf{a}_0 \geq 0 \quad (49g)$$

für alle  $i \in \{0, 1, \dots, m_S\}$  erfüllt sind. Darin sind  $m_S$  und  $m_R$  die Polynomordnungen von  $e'_R(v)$  bzw.  $e'_S(v)$ .

*Beweis.* Aus den Bedingungen (36a), (36d)–(36g) folgen nach links- und rechtsseitiger Multiplikation mit  $\mathbf{R}_1^{-1}$  mit den Substitutionen (46) unmittelbar die Bedingungen (49a)–(49e). Die Forderungen (36b) und (36c) entsprechen gemäß [16] den LMIs (49f) und (49g).  $\square$

Schließlich ist noch zu gewährleisten, dass das Gebiet möglicher Anfangszustände  $\mathcal{X}_0$  innerhalb der größten Ellipse  $\mathcal{G}(1)$  aus (15) liegt. Es ist also sicherzustellen, dass

$$\max(e_R(1), e_S(1)) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(1) \bar{\mathbf{x}} - 1 < 0$$

$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_0$  gilt. Die Forderung  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{G}(1)$  ist dann sicher erfüllt, wenn  $\mathcal{X}_0$  innerhalb der Gebiete

$$\mathcal{G}_R(1) = \{\bar{\mathbf{x}} : e_R(1) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(1) \bar{\mathbf{x}} - 1 < 0\},$$

$$\mathcal{G}_S(1) = \{\bar{\mathbf{x}} : e_S(1) \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(1) \bar{\mathbf{x}} - 1 < 0\}$$

liegt. Ist  $\mathcal{X}_0$  ein konvexes Polyeder mit den Eckpunkten  $\bar{\mathbf{x}}_{0,k}$ , lauten die Bedingung  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{G}_R(1)$  nach [16]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \bar{\mathbf{x}}_{0,k} \\ \bar{\mathbf{x}}_{0,k}^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \quad \forall k \in [1, 2^n], \quad (50a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \mathbf{a}^T \mathbf{Q} \mathbf{a} + 2 \mathbf{a}^T \mathbf{y}_R & \mathbf{y}_R^T \\ \mathbf{y}_R & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (50b)$$

Forderung  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{G}_S(1)$  führt zur LMI

$$\begin{bmatrix} 1 - \mathbf{a}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{a}_0 + 2 \mathbf{a}_0^T \mathbf{y}_S & \mathbf{y}_S^T \\ \mathbf{y}_S & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (50c)$$

Nun ist noch eine konvexe Gütefunktion zu wählen. Dazu kann beispielsweise die Abklingrate des mit dem Regler  $\mathbf{k}_S(1)$  geregelten Systems verwendet werden.

**Definition 2 ([5]).** Die Abklingrate eines Systems  $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}$  ist definiert als das größte  $\alpha$ , so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

für alle Trajektorien  $\mathbf{x}(t)$  gilt.

Ist für ein bestimmtes  $\alpha$  die LMI

$$\mathbf{Q} \hat{\mathbf{A}}^T + \hat{\mathbf{A}} \mathbf{Q} \leq -2\alpha \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} \succ 0,$$

erfüllt, so ist  $\alpha$  eine untere Abschätzung der Abklingrate. Um ein schnelles Ausregelverhalten zu erzielen, lautet das Optimierungsproblem

$$\max \alpha, \quad \text{so dass} \quad (51)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0 \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{b}} \mathbf{z}^T - \mathbf{z} \bar{\mathbf{b}}^T \leq -2\alpha \mathbf{Q},$$

$$(49a) - (49d), (49f), (49g), (50a) - (50c).$$

Im Optimierungsproblem (51) ist  $\alpha$  eine Variable und aufgrund des Produktterms  $\alpha \mathbf{Q}$  nicht konvex. Das Problem ist aber nach [5] quasikonvex in  $\alpha$  und daher mittels eines Bisektionsverfahrens bezüglich  $\alpha$  lösbar.

Der Regler  $\mathbf{k}_S(v)$  ist lediglich durch die Forderung beschränkt, dass der geschlossene Regelkreis eine gemeinsame Ljapunov-Funktion mit den virtuellen Regelkreisen (25), (26) hat.

Dies kann zu großen Einträgen von  $\hat{\mathbf{a}}_*$  führen, die aufgrund der Sättigungsfunktionen keine positiven Auswirkungen auf die Regelgüte haben und zu numerischen Problemen führen. Abhilfe schafft nach [10] eine virtuelle Stellgrößenbeschränkung  $|\mathbf{k}_S(1) \mathbf{x}| \leq \beta$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$  mit  $\beta \gg 1$ . Als LMI ergibt sich hieraus

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - \mathbf{a}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{a}_0 + 2 \mathbf{a}_0^T \mathbf{z} & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (52)$$

## 5 Beispiel

Als Beispiel wird die Höhenregelung des Business Jets Cessna Citation 500 aus [12] betrachtet. Das Modell wurde bei einer Flughöhe von 5000 m und einer

Reisegeschwindigkeit von 128,2 m/s linearisiert. Als Zustandsgrößen werden der Anstellwinkel  $x_1$  in rad, der Nickwinkel  $x_2$  in rad, die Nickwinkelgeschwindigkeit  $x_3$  in  $\text{rad s}^{-1}$  und die Flughöhenabweichung  $x_4$  in m verwendet. Es ergibt sich das Zustandsraummodell

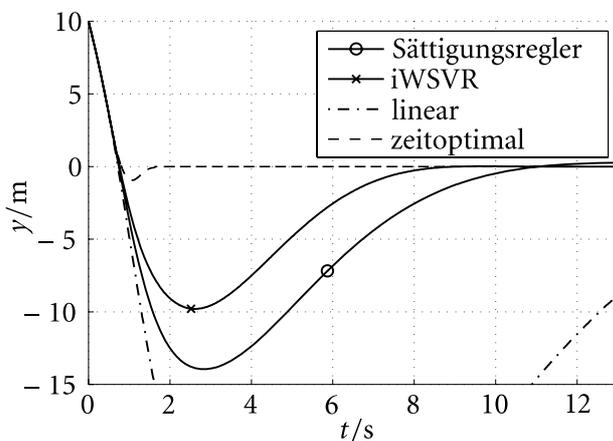
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1,28 & 0 & 0,98 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5,43 & 0 & -1,84 & 0 \\ -128,2 & 128,2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix} u_A.$$

Stellgröße ist der Höhenruderwinkel  $u_A$ , welcher auf  $u_{A,\max} = 15^\circ$  begrenzt ist. Eine Stellratenbeschränkung von  $\dot{u}_{A,\max} = 30^\circ/\text{s}$  ist ebenfalls zu berücksichtigen. Der Höhenruderwinkel wird von einem hydraulischen Aktor (siehe Bild 1) verstellt, wobei zur Modellierung seiner Dynamik von  $\tau = 5$  ausgegangen wird. Die Menge möglicher Anfangsauslenkungen ist

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x} : |x_1| \leq \frac{35\pi}{180}, |x_2| \leq \frac{25\pi}{180}, |x_3| \leq \frac{25\pi}{180}, |x_4| \leq 100 \right\}$$

und das Höhenruder ist nicht ausgelenkt, d. h.  $u_{A,0} = 0$ . Die Höhenabweichung  $y = x_4$  ist in möglichst kurzer Zeit auszuregulieren. Bild 4 zeigt den Verlauf der Höhenabweichung  $y$  nach einer Anfangsauslenkung von  $\mathbf{x}_0 = [0 \ -5/180\pi \ -20/180\pi \ 10]^T$  für den linearen Sättigungsregler nach [4], für die iWSVR und eine nichtsättigende lineare Zustandsrückführung. Die Optimierung aller Regler erfolgte dabei mittels LMIs, als Gütemaß wurde die Konvergenzrate gewählt. In der Regelungsnormalform mit dem transformierten Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}} = T[\mathbf{x}]$  lautet das Regelgesetz der iWSVR:

$$u = -8,53v^{-5}\hat{x}_1 - 43,72v^{-4}\hat{x}_2 - (91,79v^{-3} - 7,68)\hat{x}_3 - (39,87v^{-2} - 4,65)\hat{x}_4 - (12,54v^{-1} - 1,62)\hat{x}_5.$$



**Bild 4** Verlauf der Höhenabweichung  $y$  für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = [0 \ -5/180\pi \ -20/180\pi \ 10]^T$ .

Als Skalierungsfunktionen ergeben sich

$$e_S(v) = 4,58v^6 - 8,83v^5 + 6,60v^4 - 4,19v^3 + 2,86v^2 - 2,86v + 1,91,$$

$$e_R(v) = 25,57v^4 - 21,09v^3 - 7,07v^2 - 24,87v + 27,75.$$

Schließlich ergibt sich das Auswahlgesetz

$$g(v, \hat{\mathbf{x}}) = \max(e_S(v), e_R(v)) \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(v) \hat{\mathbf{x}} - 1 = \max(e_S(v), e_R(v)) c(\hat{\mathbf{x}}) - 1$$

mit  $c(\hat{\mathbf{x}}) = c_{10}(\hat{\mathbf{x}})v^{-10} + c_9(\hat{\mathbf{x}})v^{-9} + \dots + c_1(\hat{\mathbf{x}})v^{-1}$ ,

$$c_{10}(\hat{\mathbf{x}}) = 9,19\hat{x}_1^2, \quad c_9(\hat{\mathbf{x}}) = 57,00\hat{x}_1\hat{x}_2,$$

$$c_8(\hat{\mathbf{x}}) = 123,63\hat{x}_2^2 + 46,52\hat{x}_1\hat{x}_3,$$

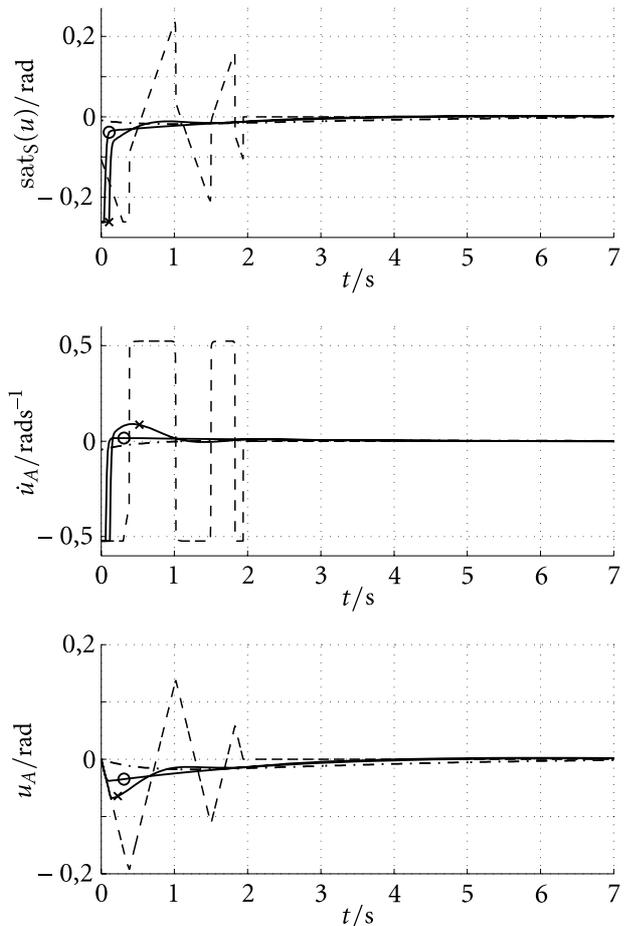
$$c_7(\hat{\mathbf{x}}) = 221,45\hat{x}_2\hat{x}_3 + 16,27\hat{x}_1\hat{x}_4,$$

$$c_6(\hat{\mathbf{x}}) = 3,08\hat{x}_1\hat{x}_5 + 177,52\hat{x}_3^2 + 79,52\hat{x}_2\hat{x}_4,$$

$$c_5(\hat{\mathbf{x}}) = 15,79\hat{x}_2\hat{x}_5 + 135,72\hat{x}_3\hat{x}_4,$$

$$c_4(\hat{\mathbf{x}}) = 33,53\hat{x}_3\hat{x}_5 + 28,90\hat{x}_4^2,$$

$$c_3(\hat{\mathbf{x}}) = 14,12\hat{x}_4\hat{x}_5, \quad c_2(\hat{\mathbf{x}}) = 2,22\hat{x}_5^2, \quad c_1(\hat{\mathbf{x}}) = 0.$$



**Bild 5** Verlauf der kommandierten Stellgröße  $\text{sats}(u)$  (oben), der Stellrate  $\dot{u}_A$  (mitte) und der, auf die Strecke wirkenden, Stellgröße  $u_A$  für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = [0 \ -5/180\pi \ -20/180\pi \ 10]^T$ . Man beachte die im Vergleich mit Bild 4 unterschiedliche Skalierung der Zeitachse.

Zur Bewertung der Regelungen wurde auch eine zeitoptimale Steuerung [13] berechnet. Die iWSVR erzielt eine Ausregelzeit, die verglichen mit dem Sättigungsregler nach [4] deutlich kürzer ist. Eine nichtsättigende lineare Zustandsrückführung weist die größte Ausregelzeit auf. Die zugehörige Kurve verlässt den Darstellungsbereich. Bild 5 zeigt die Verläufe von  $\text{sat}_S(u) = \text{sgn}(u) \min(u_{A,\max}, |u|)$ ,  $\dot{u}_A$  und der vom Aktor gelieferten Stellgröße  $u_A$ . Im Vergleich zum Sättigungsregler ist erkennbar, dass die iWSVR die Stellgröße  $u_A$  und die Stellrate  $\dot{u}_A$  besser ausnutzt. Die von der iWSVR kommandierte Stellgröße  $u$ , sowie die Stellrate sind längere Zeit in Sättigung. Die iWSVR bildet den zeitoptimalen Verlauf besser ab als der lineare Sättigungsregler. Eine lineare Zustandsrückführung nutzt den Stellbereich am schlechtesten aus, woraus der langsame Ausregelvorgang resultiert.

## 6 Zusammenfassung

Unter Verwendung eines Aktormodells wurde in diesem Artikel eine Erweiterung der impliziten weichen strukturvariablen Regelung auf Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen vorgestellt. Die Entwurfsbedingungen wurden in konvexe Nebenbedingungen überführt, was einen effizienten Entwurf ermöglicht.

## Danksagung

Wir bedanken uns für die Förderung des Forschungsvorhabens durch die Konrad-Adenauer-Stiftung.

## Anhang

### A.1 Lipschitz Stetigkeit

Zum Nachweis der Lipschitz-Stetigkeit der Funktion  $\max(e_S(v), e_R(v))$  wird der Zusammenhang

$$\max(e_S(v), e_R(v)) = \frac{1}{2} (e_S(v) + e_R(v) + |e_S(v) - e_R(v)|)$$

ausgenutzt. Als Polynome sind  $e_S(v)$  und  $e_R(v)$  nach [8] auf jedem beliebigen Intervall Lipschitz-stetig. Da die Betragsfunktion  $|x|$  wie auch die Komposition zweier Lipschitz-stetiger Funktionen nach [8] Lipschitz-stetig ist, ist  $\max(e_S(v), e_R(v))$  für  $v \in (0, 1]$  Lipschitz-stetig.

### A.2 Reglerentwurf

Mit der Wahl von  $\beta = 50$  für die sättigenden Regelungen und  $v_{\min} = 0,1$  für die iWSVR ergibt eine Optimierung der Konvergenzrate mit Hilfe des Solvers SDPT3 [14] und dem Paket YALMIP [11] die Reglerparameter:

1. Weiche strukturvariable Regelung

$$\mathbf{a}_R^T = [0,9987 \quad 5,0059 \quad 6,7945 \quad 10,2442 \quad 3,7156]$$

$$\mathbf{a}_S^T = [0,5478 \quad 2,7926 \quad 10,0391 \quad 5,4945 \quad 1,7608]$$

$$\mathbf{a}_*^T = [8,5341 \quad 43,7158 \quad 91,7856 \quad 39,8658 \quad 12,5372]$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 9,1939 & 28,5009 & 23,2580 & 8,1369 & 1,5397 \\ 28,5009 & 123,6317 & 110,7223 & 39,7613 & 7,894 \\ 23,2580 & 110,7223 & 177,5232 & 67,8585 & 16,7667 \\ 8,1369 & 39,7613 & 67,8585 & 28,9034 & 7,0574 \\ 1,5397 & 7,8940 & 16,7667 & 7,0574 & 2,2241 \end{bmatrix}$$

2. Linearer Sättigungsregler nach [4]

$$\mathbf{h}_R^T = [-0,983 \quad 1,415 \quad 0,212 \quad 0,003 \quad -3,062]$$

$$\mathbf{h}_S^T = [-0,519 \quad 0,747 \quad 0,112 \quad 0,002 \quad -0,439]$$

$$\mathbf{k}_S^T = [-11,272 \quad 16,236 \quad 2,422 \quad 0,035 \quad -46,219]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,3446 & -0,4978 & -0,0729 & -0,0012 & 0,5982 \\ -0,4978 & 0,7195 & 0,1052 & 0,0018 & -0,8617 \\ -0,0729 & 0,1052 & 0,0155 & 0,0003 & -0,1285 \\ -0,0012 & 0,0018 & 0,0003 & 5,8 \cdot 10^{-6} & -0,0018 \\ 0,5982 & -0,0018 & -0,1285 & -0,0018 & 2,6834 \end{bmatrix}$$

3. Lineare Zustandsrückführung

$$\mathbf{k}_S^T = [-0,1795 \quad 0,2563 \quad 0,0404 \quad 0,0003 \quad 2,1271]$$

## Literatur

- [1] J. Adamy, „Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen“, *VDI Fortschrittsberichte, Reihe 8, Nr. 271*, 1991.
- [2] J. Adamy, A. Flemming, „Soft variable structure control: a survey“, *Automatica* 40 (2004), Nr. 11, S. 1821–1844.
- [3] J. Adamy, „Implicit Lyapunov Functions and Isochrones of Linear Systems“, *IEEE Trans. Autom. Contr.* 50 (2005), S. 874–879.
- [4] A. Bateman, Z. Lin, „An analysis and design method for linear systems under nested saturation“ *Systems and Control Letters* 48 (2003), S. 41–52.
- [5] S. Boyd, L. E. Ghouli, E. Feron, V. Balakrishnan, „Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory“ *Philadelphia SIAM* (1994).
- [6] M. Buhl, P. Joos, B. Lohmann, „Sättigende weiche strukturvariable Regelung“, *at-Automatisierungstechnik* 56 (2008) 6, S. 316–323.
- [7] J. M. da Silva Jr., S. Tarbouriech, „Local Stabilization of Linear Systems under Amplitude and Rate Saturating Actuators“ *IEEE Trans. Autom. Contr.* 48 (2003), Nr. 5, S. 842–847.
- [8] K. Erikson, D. Estep, C. Johnson, „Applied Mathematics: Body and Soul“ *Springer* (2004).
- [9] G. Giorgi „Dini Derivatives in Optimization – Part I“ *Decisions in Economics and Finance* 15 (1992), S. 3–30.
- [10] H. Lens, J. Adamy, „Schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen“ *at-Automatisierungstechnik* 57 (2009) 2, S. 70–79.
- [11] J. Löfberg, „YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB“ *Proc. of the CACSD Conference* (2004).
- [12] J. M. Maciejowski, „Predictive Control with Constraints“ *Prentice Hall* (2002).
- [13] M. Scott, „Time/Fuel Optimal Control of Constrained Linear Discrete Systems“ *Automatica* 22 (1986), Nr. 6, S. 711–715.
- [14] K. C. Toh, M. J. Todd, R. H. Tutuncu, „SDPT3: A Matlab software package for semidefinite programming“ *Optimization Methods and Software*, 11 (1999), S. 545–581.
- [15] F. Tyan, D. S. Bernstein, „Dynamic Output Feedback Compensation for Linear Systems with independent amplitude and rate saturations“ *Int. J. Control*, 67 (1997), S. 89–116.
- [16] D. Yankulova, J. Adamy, „LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen“ *at-Automatisierungstechnik* 56 (2008) 12, S. 636–643.

Manuskripteingang: 18. Dezember 2009



**Dipl. Ing. Klaus Kefferpütz** promoviert am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik der TU Darmstadt im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiete: Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen.

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: kkefferp@rtr.tu-darmstadt.de



**Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy** ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektro- und Informationstechnik der TU Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren, Computational Intelligence, autonome mobile Roboter.

Adresse: TU Darmstadt, FB Elektro- und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de

Verfügbar unter  
lediglich die vom Gesetz vorgesehenen Nutzungsrechte gemäß UrhG



## Regelungstechnik und MATLAB ideal kombiniert



Helmut Bode  
**Systeme der Regelungstechnik mit MATLAB und Simulink**  
Analyse und Simulation

2010 | 448 S. | Broschur | € 34,80  
ISBN 978-3-486-59083-8

Das Buch stellt die Einsatzmöglichkeiten von MATLAB und Simulink in der Regelungstechnik zur Analyse und computergestützten Simulation dynamischer Systeme vor. Neben Definitionen und Bemerkungen zur Historie der Automatisierung werden außerdem exemplarisch regelungstechnische Probleme modelliert und simuliert.

Die elementare und umfassende Darstellung ist ausgezeichnet für den Einsatz in der Lehre geeignet. Alle eingesetzten MATLAB-Codes werden auch auf der Website des Verlags zum Download angeboten.

**Das Buch richtet sich an Studierende der Elektrotechnik, des Maschinenbaus, der Automatisierungstechnik, der Verfahrenstechnik sowie der Systemtechnik und Mechatronik.**

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:  
Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333, [verkauf@oldenbourg.de](mailto:verkauf@oldenbourg.de)  
[www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de](http://www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de)