Führungs- und Störgrößenaufschaltungen für lineare verteilt-parametrische Systeme

Reference and Disturbance Feedforward Controllers for Linear Distributed-parameter Systems

Joachim Deutscher, Christian Harkort, Universität Erlangen-Nürnberg

Zusammenfassung Dieser Beitrag behandelt die Führungs- und Störgrößenaufschaltung für lineare verteilt-parametrische Mehrgrößensysteme, die zur Klasse der Riesz-Spektralsysteme gehören. Für die Aufschaltmatrizen und -operatoren der Führungs- und Störgrößenaufschaltung werden explizite Formelausdrücke angegeben. Der Entwurf erfolgt auf Grundlage einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, die eine Bestimmung der Aufschaltung und eines Zustandsreglers zur Einstellung der Regelungsdynamik unabhängig voneinander ermöglicht. Anhand eines Wärmeleiters werden die Ergebnisse des Beitrags in Simulationen veranschaulicht. ►►► **Summary** In this article the design of reference and disturbance feedforward controllers is considered for linear distributed-parameter systems, which are Riesz-spectral systems. Explicit expressions are derived for the feedforward controller. The design uses a two-degree-of-freedom structure which enables an independent computation of the feedforward controller and of a state feedback controller that assigns the closed loop dynamics. A heat conductor is used to demonstrate the results of the contribution in simulations.

Schlagwörter Lineare verteilt-parametrische Systeme, Führungsgrößenaufschaltung, Störgrößenaufschaltung, Vollständige Modale Synthese, Zwei-Freiheitsgrade-Regelung ►►► **Keywords** Linear distributed-parameter systems, reference feedforward control, disturbance feedforward control, parametric approach, two-degrees-of-freedom control

1 Einleitung

In diesem Beitrag wird der Entwurf von Führungs- und Störgrößenaufschaltungen für lineare verteilt-parametrische Mehrgrößensysteme mit verteiltem Eingriff sowie verteilter Messung betrachtet. Hierzu müssen sich die Führungs- und Störgrößen durch ein Signalmodell beschreiben lassen, was beispielsweise für sprung-, sinus- und rampenförmige Zeitverläufe möglich ist. Bei der Führungs- und Störgrößenaufschaltung wird eine Aufschaltung der Zustände des Signalmodells so bestimmt, dass die Regelgrößen den modellierten Führungsgrößen asymptotisch folgen und die modellierten Störungen asymptotisch kompensiert werden.

Der Entwurf solcher Aufschaltungen für unendlichdimensionale Systeme wurde in der Literatur im Rahmen der geometrischen Regelungstheorie behandelt (siehe [1; 13]). Zur Bestimmung der Vorsteuerung müssen hierzu Operatorgleichungen, die sog. *regu-*

lator equations, gelöst werden. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass sie sowohl die Betrachtung einer großen Klasse von verteilt-parametrischen Systemen als auch die Behandlung von Totzeitsystemen umfasst. Bei konkreten Anwendungen muss dann eine Lösung der regulator equations für die betreffende Systemklasse ermittelt werden. In dieser Arbeit wird die Bestimmung der Führungs- und Störgrößenaufschaltung für die Klasse der *Riesz-Spektralsysteme* betrachtet, durch die sich viele lineare verteilt-parametrische Systeme in praktischen Anwendungen beschreiben lassen (siehe [2]). Diese verteilt-parametrischen Systeme zeichnen sich insbesonders dadurch aus, dass sie einer modalen Analyse zugänglich sind. Die Formulierung dieser Systeme als abstraktes Anfangswertproblem in einem geeigneten Hilbertraum ermöglicht eine anschauliche Herleitung der Führungs- und Störgrößenaufschaltung in naher Analogie zu linearen konzentriert-parametrischen Systemen (siehe [11]). Darüber hinaus lassen sich bei solchen Systemen für die Aufschaltmatrizen und -operatoren der Führungs- und Störgrößenaufschaltung explizite Formelausdrücke herleiten. Diese stellen dann eine geschlossene Lösung der regulator equations dar. Beim Entwurf wird eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur zugrunde gelegt (siehe [10]). Damit lässt sich die Vorsteuerung zur Sicherstellung der stationären Genauigkeit im Führungs- und Störverhalten sowie die Einstellung der Regelungsdynamik durch eine Zustandsrückführung unabhängig voneinander durchführen. Dies bedeutet, dass die Führungs- und Störgrößenaufschaltung für eine veränderte Regelungsdynamik nicht neu berechnet werden muss.

Der nachfolgende Abschnitt stellt die Zustandsraumbeschreibung von linearen verteilt-parametrischen Systemen im Hilbertraum exemplarisch anhand eines Wärmeleiters vor, um die Darstellung möglich anschaulich zu gestalten. Anschließend werden im Abschnitt 3 Führungs- und Störgrößenaufschaltungen für verteilt-parametrische Systeme berechnet, die stationäre Genauigkeit im Führungs- und Störverhalten sichern. Um die zugehörige Dynamik einstellen zu können, wird die Aufschaltung um eine Zustandsrückführung ergänzt, die mittels der Vollständigen Modalen Synthese für verteilt-parametrische Systeme bestimmt wird. Für den bereits bei Einführung der Zustandsraumbeschreibung verwendeten Wärmeleiter erfolgt eine Untersuchung der Führungs- und Störgrößenaufschaltung für sprungförmige Führungsgrößen und Sinusstörungen in Simulationen.

2 Zustandsraumbeschreibung linearer verteilt-parametrischer Systeme

Das in [3] vorgestellte einfache Modell eines Wärmeleiters wird im Folgenden als Ausgangspunkt gewählt, um die Zustandsraumbeschreibung linearer verteilt-parametrischer Systeme exemplarisch einzuführen. Die

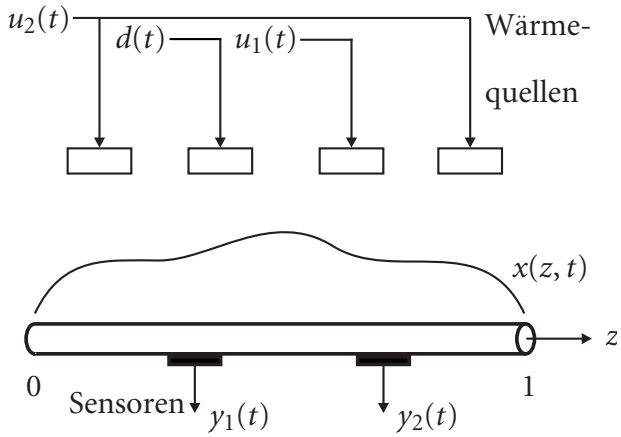

Bild 1 Wärmeleiter mit der Temperatur $x(z,t)$, den Eingängen $u_1(t)$ und $u_2(t)$, der Störung $d(t)$ sowie den Regelgrößen $y_1(t)$ und $y_2(t)$.

Dynamik dieses in Bild 1 schematisch dargestellten Systems wird durch das *Anfangs-Randwertproblem*

$$\partial_t x(z,t) = \partial_z^2 x(z,t) + b^T(z)u(t) + g(z)d(t),\ t>0,\ z\in(0,1) \tag{1}$$

$$x(0,t) = x(1,t) = 0,\ t>0 \tag{2}$$

$$x(z,0) = x_0(z),\ z\in[0,1] \tag{3}$$

$$y(t) = \int_0^1 c(z)x(z,t)dz,\ t\geq 0 \tag{4}$$

beschrieben. Die Ortscharakteristiken $b_1(z)$ und $b_2(z)$ in $b^T(z) = [b_1(z)\ \ b_2(z)]$ sind durch

$$b_1(z) = \begin{cases} 1 & : 0{,}5 \leq z \leq 0{,}6 \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases} \tag{5}$$

$$b_2(z) = \begin{cases} 0{,}5 & : 0{,}15 \leq z \leq 0{,}25 \\ 0{,}5 & : 0{,}75 \leq z \leq 0{,}85 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

definiert und geben an, wie sich die Heizleistungen u_1 und u_2 der Wärmequellen auf den Stab über den Ortsbereich $0 \leq z \leq 1$ verteilen. Das System wird in dem durch

$$g(z) = \begin{cases} 15 & : 0{,}27 \leq z \leq 0{,}35 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

beschriebenen Bereich durch eine Wärmequelle mit der Heizleistung d gestört. Die Regelgrößen y_1 und y_2 sind Temperaturen, welche über endliche Ortsintervalle gemittelt werden. Diese sind durch die Ortscharakteristiken

$$c_1(z) = \begin{cases} 1 & : 0{,}37 \leq z \leq 0{,}43 \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases} \tag{8}$$

$$c_2(z) = \begin{cases} 1 & : 0{,}67 \leq z \leq 0{,}73 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \tag{9}$$

mit $c(z) = [c_1(z)\ \ c_2(z)]^T$ festgelegt.

Es ist Ziel dieses Abschnitts für das System (1)–(4) eine Zustandsraumbeschreibung in Form des *(abstrakten) Anfangswertproblems*

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) + \mathcal{G}d(t), \quad x(0) = x_0 \tag{10}$$

$$y(t) = \mathcal{C}x(t) \tag{11}$$

anzugeben. Im allgemeinen Fall werden in dieser Arbeit Zustandsraumbeschreibungen mit m Eingängen u und m Ausgängen y sowie q Störgrößen d betrachtet. Wie man sofort erkennt, stimmt (10)–(11) formal mit der Zustandsdarstellung konzentriert-parametrischer Systeme überein (siehe z. B. [6]). Im Unterschied zu solchen Systemen ist der zugehörige Zustandsraums jedoch nicht von vorneherein festgelegt. Vielmehr gehört die Wahl des Zustandsraums bei verteilt-parametrischen Systemen mit zur Modellbildung. Gesichtspunkte für die Bestimmung des Zustandsraums und im Allgemeinen auch der Zustandsgrößen sind Aussagen über die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung von (10). Im vorliegenden Beispiel wählt man als Zustandsgröße die Temperatur des Wärmeleiters, d. h. man führt den (skalaren) *Zustand* $x(\cdot, t) = \{x(z,t),\ z \in [0,1]\}$ ein. Besitzt das verteilt-parametrische System mehr als einen verteilten Energiespeicher, dann ist $x(t)$ ein Vektor und die Wahl des Zustands kann nicht mehr so offensichtlich sein wie hier (siehe z. B. [8]). Als *Zustandsraum* H wählt man den Funktionenraum $L_2(0,1)$ der im Intervall $[0,1]$ absolut quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen, und führt dort das *Skalarprodukt*

$$\langle x, y\rangle_H = \int_0^1 x(z)\overline{y(z)}dz\,, \tag{12}$$

ein, worin $\bar{y}$ die zu y konjugiert komplexe Größe bezeichnet. Man kann zeigen, dass der Raum $L_2(0,1)$ zusammen mit dem Skalarprodukt (12) ein *Hilbertraum* ist. Der Zustand $x(t)$ ist eine *abstrakte Funktion*, d. h. für jeden festen Zeitpunkt $t \geq 0$ ist die Ortsfunktion $x(z,t)$ im Intervall $[0,1]$ Element des Hilbertraums H. Da hierbei nur die Zeit t als Ordnungsparameter auftritt, wird in (10)–(11) die Ortsabhängigkeit weggelassen. Auf dem Zustandsraum H lässt sich nun der *Systemoperator* $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$ mit dem *Definitionsbereich* $D(\mathcal{A})$ gemäß

$$\mathcal{A}h = \frac{d^2}{dz^2}h \tag{13}$$

$$h \in D(\mathcal{A}) = \Big\{h \in L_2(0,1) \mid h, \frac{d}{dz}h \text{ absolut stetig}, \frac{d^2}{dz^2}h \in L_2(0,1) \text{ und } h(0) = h(1) = 0\Big\} \tag{14}$$

definieren. Anhand von (14) erkennt man, dass die in (2) geforderten Randbedingungen bei der Formulierung (10) im Definitionsbereich von $\mathcal{A}$ berücksichtigt werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Randbedingungen homogen bzw. gleich Null sein müssen. Diese Forderung macht Probleme, wenn z. B. am Rand des Wärmeleiters eine Störung eingreift. Dies würde bedeuten, dass sich der Definitionsbereich von $\mathcal{A}$ nicht mehr unabhängig von dieser Anregung einführen lässt. Deshalb muss man in diesem Fall die Randbedingungen erst homogenisieren, bevor man solche Systeme im Zustandsraum darstellen kann (siehe [2]). Der zweite in (10) auftretende Operator ist der *Eingangsoperator* $\mathcal{B}$, der durch

$$\mathcal{B}u(t) = b_1u_1(t) + b_2u_2(t), \quad b_1, b_2 \in H \tag{15}$$

definiert ist (siehe (1) sowie (5)–(6)). Entsprechend gilt mit (1) und (7) für den *Störeingangsoperator* $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}d(t) = gd(t), \quad g \in H\,. \tag{16}$$

In der Ausgangsgleichung (11) tritt der *Ausgangsoperator* $\mathcal{C}$ auf, der sich mit Hilfe des Skalarprodukts (12) gemäß

$$\mathcal{C}x(t) = \big[\langle x(t), c_1\rangle_H \quad \langle x(t), c_2\rangle_H\big]^T, \quad c_1, c_2 \in H \tag{17}$$

einführen lässt (siehe (4) und (8)–(9)). In [2] wird gezeigt, dass der Operator $\mathcal{A}$ in (13)–(14) ein *infinitesimaler Generator einer C_0-Halbgruppe* ist. Daraus folgt, dass die eindeutige *milde Lösung* der homogenen Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad x(0) = x_0 \in H \tag{18}$$

(siehe (10)) in der Form

$$x(t) = \mathcal{T}(t)x_0 \tag{19}$$

dargestellt werden kann, worin die durch t parametrierte Familie $\mathcal{T}(t)$ von Operatoren eine C_0-Halbgruppe ist. Diese Aussage erinnert formal an die bei konzentriert-parametrischen Systemen bekannte Lösung der homogenen Zustandsgleichungen mit Hilfe der Matrizenexponentialfunktion. In der Tat kann man die C_0-Halbgruppe als Verallgemeinerung der Matrizenexponentialfunktion auf verteilt-parametrische Systeme ansehen. Diese Betrachtungsweise hat den Vorzug, dass man anhand des Generators $\mathcal{A}$ Aussagen über $\mathcal{T}(t)$ und damit über das System machen kann, ohne dazu $\mathcal{T}(t)$ explizit berechnen zu müssen. Die eindeutige milde Lösung der inhomogenen Zustandsgleichung (10) im störungsfreien Fall ist analog zum konzentriert-parametrischen Fall durch

$$x(t) = \mathcal{T}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-\tau)\mathcal{B}u(\tau)d\tau \tag{20}$$

gegeben, falls $x(0) \in H$ und u ein Element von $L_p([0,\tau]; \mathbb{R}^m)$ für ein $\tau > 0$ und ein $p \geq 1$ ist (d. h. das Lebesgue-Integral $\int_0^\tau ||u(t)||^p dt$ existiert). In [2] wird gezeigt, dass die milde Lösung (20) des abstrakten Anfangswertproblems (10) mit der *schwachen Lösung* des Anfangs-Randwertproblems (1)–(3) übereinstimmt. Die schwache Lösung stellt einen allgemeineren Lösungsbegriff dar als die *klassische Lösung*. Letztere besitzt

die durch die Differentialgleichung (1) geforderte Differenzierbarkeitseigenschaft. In vielen Fällen wird das Verhalten technischer Systeme aber durch Lösungen beschrieben, die nicht die nötige Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen. Man denke beispielsweise bei konzentriert-parametrischen Systemen an die sprungförmige Anregung eines Integrierers, welche auf eine nicht differenzierbare Systemantwort führt. Dasselbe gilt auch für die in diesem Beitrag betrachtete Problemstellung, da beispielsweise sprungförmige Führungsgrößen vorkommen können. Darüber hinaus wird durch den Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ in (14) ebenfalls nur die Existenz der *schwachen* Ortsableitungen gefordert, womit auch nicht (klassisch) differenzierbare Temperaturprofile zulässig sind. All diese Fälle werden dann mit der schwachen Lösung erfasst. Gibt es jedoch eine klassische Lösung des Anfangs-Randwertproblems, so liefert (20) ebenfalls diese Lösung.

Ein wesentlicher Vorteil der Zustandsdarstellung (10)–(11) besteht darin, dass mit ihr formal nahezu wie mit der Zustandsbeschreibung konzentriert-parametrischer Systeme gearbeitet werden kann. Darüber hinaus beinhalten die vorgestellten Ergebnisse die Behandlung konzentriert-parametrischer Systeme als Spezialfall.

Eine wichtige Klasse von Systemoperatoren $\mathcal{A}$ sind die sog. *Riesz-Spektraloperatoren*, zu denen auch der Operator in (13)–(14) und die Systemoperatoren vieler Anwendungsbeispiele gehören. Um diese Klasse von Operatoren näher zu charakterisieren, betrachtet man das *Eigenwertproblem*

$$\mathcal{A}\phi_{x,i} = \lambda_{x,i}\phi_{x,i}, \quad i \geq 1 \tag{21}$$

mit den *Eigenvektoren* (oder auch *Eigenfunktionen*) $\phi_{x,i}$ und den *Eigenwerten* $\lambda_{x,i}$ von $\mathcal{A}$. Man beachte, dass es sich wegen der Definition (13)–(14) von $\mathcal{A}$ bei (21) um das Randwertproblem

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi_{x,i}(z) = \lambda_{x,i}\phi_{x,i}(z), \; z \in (0,1), \quad i \geq 1 \tag{22}$$

$$\phi_{x,i}(0) = \phi_{x,i}(1) = 0 \tag{23}$$

handelt. Jede nichtverschwindende Lösung $\phi_{x,i}(z)$ dieses Randwertproblems, die sich für einen bestimmten Wert $\lambda_{x,i}$ ergibt, ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{x,i}$. Bei Riesz-Spektraloperatoren bilden die Eigenvektoren $\{\phi_{x,i}, i \geq 1\}$ eine *Riesz-Basis* im Zustandsraum H. Dies bedeutet, dass jedes Element ζ aus H eindeutig nach den Eigenvektoren $\phi_{x,i}$ bzw. $\psi_{x,i}$ entwickelt werden kann. Dabei sind $\{\psi_{x,i}, i \geq 1\}$ die Eigenvektoren des *adjungierten Operator* $\mathcal{A}^*$, welche der *Biorthonormalitätsrelation*

$$\langle \phi_{x,i}, \psi_{x,j}\rangle_H = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases} \tag{24}$$

genügen. Es gelten dann die eindeutigen Reihenentwicklungen

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \psi_{x,i}\rangle_H \phi_{x,i} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \phi_{x,i}\rangle_H \psi_{x,i}\,. \tag{25}$$

Diesen Zusammenhang kann man auch im Rahmen konzentriert-parametrischer Systeme der Ordnung n leicht veranschaulichen. Dort entspricht dem Riesz-Spektraloperator eine diagonalisierbare reelle Systemmatrix A, deren Eigenvektoren eine Basis des Zustandsraums $\mathbb{C}^n$ aufspannen. Bekanntlich kann durch geeignete Skalierung immer erreicht werden, dass die Eigenvektoren von A^T stets biorthonormal zu denen von A sind. Dann lassen sich Elemente (bzw. Vektoren) von $\mathbb{R}^n$ nach dem durch die Eigenvektoren von A und A^T gebildeten Biorthonormalsystem entwickeln. In diesem Zusammenhang entspricht der adjungierte Operator $\mathcal{A}^*$ gerade A^T und (25) ist eine Entwicklung nach einem Biorthonormalsystem. Für Systeme (10)–(11) mit einem Riesz-Spektraloperator als Systemoperator, den sog. *Riesz-Spektralsystemen*, kann die Lösung von (18) und damit auch die C_0-Halbgruppe $\mathcal{T}(t)$ explizit durch

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{x,i} e^{\lambda_{x,i} t} \langle x_0, \psi_{x,i}\rangle_H \tag{26}$$

dargestellt werden. Dies erinnert sofort an die Lösung der homogenen Zustandsgleichung bei konzentriert-parametrischen Systemen mit Eigenwerten und Eigenvektoren einer diagonalisierbaren Systemmatrix A. Das Ergebnis (26) macht auch plausibel, dass die Eigenwerte von $\mathcal{A}$ die (exponentielle) Stabilität des Systems festlegen. Diese als *spectrum determined growth assumption* bezeichnete Eigenschaft gilt für Riesz-Spektralsysteme immer. In diesem Beitrag wird noch vorausgesetzt, dass das *Spektrum* von $\mathcal{A}$ nur einfache (isolierte) Eigenwerte $\lambda_{x,i}$ ohne Häufungspunkte besitzt und nur $k < \infty$ Eigenwerte in der abgeschlossenen rechten komplexen Halbebene auftreten. Letztere Eigenschaft bedeutet, dass man nur endlich viele Eigenwerte verschieben muss, um das System zu stabilisieren. Dies stellt keine Einschränkung dar, da die hier betrachteten verteilt-parametrischen Systeme nur in diesem Fall durch Zustandsrückführung stabilisierbar sind (für Details siehe [2]).

3 Entwurf der Führungs- und der Störgrößenaufschaltung

Für die durch (10)–(11) charakterisierte Klasse von verteilt-parametrischen Systemen soll eine Führungs- und Störgrößenaufschaltung bestimmt werden, welche die Führungsgrößen y_s asymptotisch einregelt und die Störgrößen d asymptotisch ausregelt. Hierzu wird angenommen, dass sich die Führungs- und Störgrößen in Form eines gemeinsamen *Signalmodells*

$$\dot{v}(t) = Sv(t), \quad v(0) = v_0 \tag{27}$$

$$d(t) = Pv(t) \tag{28}$$

$$y_s(t) = Qv(t) \tag{29}$$

mit dem Zustandsvektor $v(t) \in \mathbb{C}^{n_v}$ und unbekannten Anfangsbedingungen $v(0)$ modellieren lassen. Im Weiteren wird noch vorausgesetzt, dass S diagonalähnlich ist

und kein Eigenwert von S mit einem Eigenwert von $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

Die eigentliche Aufgabenstellung besteht nun darin, eine *Führungs- und Störgrößenaufschaltung*

$$u_s(t) = M_u v(t) \tag{30}$$

der Zustandsgrößen v des Signalmodells so zu bestimmen (siehe Bild 2), dass

$$\lim_{t\to\infty}(y(t) - y_s(t)) = 0, \quad \forall x_0 \in H,\ \forall v_0 \in \mathbb{C}^{n_v} \tag{31}$$

gilt. Dies bedeutet, dass die Regelgrößen y den Führungsgrößen y_s auch in Anwesenheit von Störungen d asymptotisch folgen müssen. Da (30) lediglich eine Steuerungsmaßnahme darstellt, kann diese Aufschaltung die Streckendynamik nicht verändern. Damit muss zur Sicherstellung von (31) gefordert werden, dass die Strecke (10)–(11) exponentiell stabil oder durch Zustandsrückführung stabilisierbar ist. Aber auch wenn die Strecke stabil ist, kann eine zu langsame Streckendynamik zu einem nicht zufriedenstellenden Systemverhalten führen, da dann die Regeldifferenz $y - y_s$ erst für sehr große Zeiten nahezu Null wird. Aus diesen Gründen muss man im Allgemeinen die Aufschaltung (30) um eine Rückführung $\tilde{u}_R$ ergänzen, was auf das Stellgesetz

$$u(t) = u_s(t) - \tilde{u}_R(t) = M_u v(t) - \mathcal{K}(x(t) - \mathcal{M}_x v(t)) \tag{32}$$

führt. Hierin bezeichnet $\mathcal{K}$ einen *Rückführoperator*

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \langle\,\cdot\,, k_1\rangle_H \\ \vdots \\ \langle\,\cdot\,, k_m\rangle_H \end{bmatrix}, \quad k_i \in H \tag{33}$$

und $\mathcal{M}_x$ einen *Aufschaltoperator*

$$\mathcal{M}_x v(t) = \sum_{i=1}^{n_v} m_{x,i} v_i(t), \quad m_{x,i} \in H\,. \tag{34}$$

Der Aufschaltoperator $\mathcal{M}_x$ wird so bestimmt, dass der Regler nur dann im Eingriff ist, wenn die Strecke den modellierten Führungsgrößen y_s nicht folgt, d. h. $y(t) - y_s(t) \neq 0$ gilt. Er bildet hierzu den zu y_s zugehörigen Sollwert $x_s = \mathcal{M}_x v$ für die Zustandsgrößen x. Damit lässt sich durch Bestimmung von $\mathcal{K}$ die Ausregelung des Folgefehlers $y - y_s$ und somit das zum Folgeverhalten zugehörige Einschwingverhalten einstellen. Folgt die Strecke den modellierten Führungsgrößen y_s exakt, d. h. es gilt $x(t) - \mathcal{M}_x v(t) = 0$, dann wird das System nur mittels der Aufschaltung (30) gesteuert. Mit dieser Kombination aus Vorsteuerung und Regelung wird eine Entkopplung des Entwurfs der Führungs- und Störgrößenaufschaltung vom Reglerentwurf erreicht. Dies hat den Vorteil, dass man die Führungs- und Störgrößenaufschaltung nicht neu berechnen muss, wenn man $\mathcal{K}$ verändert. In diesem Ansatz erkennt man das Prinzip einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung wieder, bei der Führungs- und Störverhalten voneinander getrennt eingestellt werden können (siehe z. B. [10]). Bild 2 zeigt die resultierende Regelungsstruktur.

Um die Führungs- und Störgrößenaufschaltung (30) zu bestimmen, untersucht man das Stör- und Führungsverhalten der mit dem Stellgesetz (32) geregelten Strecke (10)–(11). Hierzu ergänzt man die Strecke um das Signalmodell (27)–(28), was auf die *erweiterte Strecke*

$$\dot{x}_e(t) = \mathcal{A}_e x_e(t) + \mathcal{B}_e u(t) \tag{35}$$

$$y(t) = \mathcal{C}_e x_e(t) \tag{36}$$

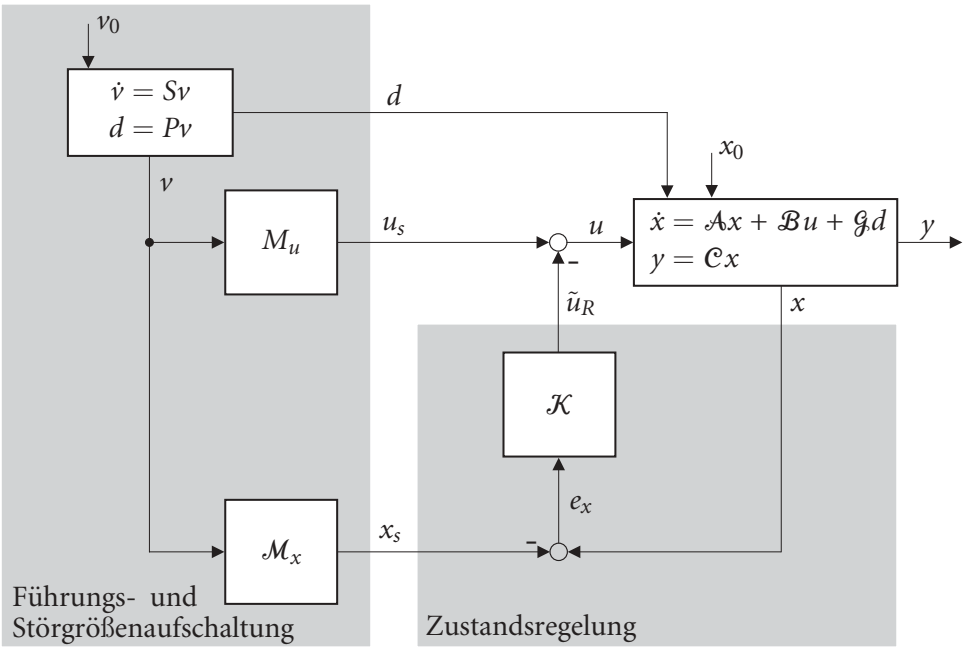

Bild 2 Führungs- und Störgrößenaufschaltung für lineare verteilt-parametrische Systeme mit Zustandsregelung.

mit dem erweiterten Zustand $x_e(\cdot,t) = [v^T(t) \;\; x^T(\cdot,t)]^T$ führt. Der Systemoperator

$$\mathcal{A}_e = \begin{bmatrix} S & 0 \\ \mathcal{G}P & \mathcal{A} \end{bmatrix} \tag{37}$$

in (35) ist im erweiterten Zustandsraum $H_e = \mathbb{C}^{n_v} \oplus H$ eingeführt. Es lässt sich nachweisen, dass H_e ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} r_1 \\ q_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{H_e} = \langle r_1, r_2 \rangle_{\mathbb{C}^{n_v}} + \langle q_1, q_2 \rangle_H \tag{38}$$

$r_i \in \mathbb{C}^{n_v}$ und $q_i \in H$ ist. Die Ein- und Ausgangsoperatoren von (35)–(36) sind durch

$$\mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{B} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_e = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{C} \end{bmatrix} \tag{39}$$

gegeben. Nach Einsetzen des Stellgesetzes (32) in (35) erhält man die *geregelte erweiterte Strecke*

$$\dot{x}_e(t) = \tilde{\mathcal{A}}_e x_e(t), \quad x_e(0) = x_{e0} \tag{40}$$

$$y(t) = \mathcal{C}_e x_e(t) \tag{41}$$

mit dem Systemoperator

$$\tilde{\mathcal{A}}_e = \begin{bmatrix} S & 0 \\ \mathcal{G}P + \mathcal{B}(M_u + \mathcal{K}\mathcal{M}_x) & \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K} \end{bmatrix}, \tag{42}$$

der den Definitionsbereich $D(\tilde{\mathcal{A}}_e) = \mathbb{C}^{n_v} \oplus D(\mathcal{A}) \subset H_e$ besitzt. Es lässt sich zeigen, dass der Operator $\tilde{\mathcal{A}}_e$ ein Riesz-Spektraloperator ist, falls der Rückführoperator $\mathcal{K}$ in (33) nur endlich viele Eigenwerte der Strecke verschiebt und alle resultierenden Eigenwerte von $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ einfach und verschieden von den Eigenwerten von S sind. In diesem Fall kann man gemäß (26) die Lösung der homogenen Zustandsgleichung (40) unter Verwendung der Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ und der zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{\phi}_i$ von $\tilde{\mathcal{A}}_e$ sowie der Eigenvektoren $\tilde{\psi}_i$ von $\tilde{\mathcal{A}}_e^*$ angeben. Setzt man die Lösung in (41) ein, so gilt mit (29) für den Folgefehler

$$y(t) - y_s(t) = \sum_{i=1}^{n_v} \begin{bmatrix} -Q & \mathcal{C} \end{bmatrix} \tilde{\phi}_i e^{\lambda_{v,i} t} \langle x_{e0}, \tilde{\psi}_i \rangle_{H_e} + \sum_{i=n_v+1}^{\infty} \begin{bmatrix} -Q & \mathcal{C} \end{bmatrix} \tilde{\phi}_i e^{\tilde{\lambda}_i t} \langle x_{e0}, \tilde{\psi}_i \rangle_{H_e} . \tag{43}$$

Darin wurde berücksichtigt, dass wegen der Dreiecksstruktur von (42) die Eigenwerte $\lambda_{v,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n_v$, des Signalmodells (27) durch die Rückführung (32) nicht verschoben werden und somit in der Regelung erhalten bleiben, d. h. $\tilde{\lambda}_i = \lambda_{v,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n_v$. Anhand von (43) lässt sich unmittelbar eine Bedingung ablesen, damit (31) gilt. Der erste Summenterm in (43) verschwindet im Allgemeinen für $t \to \infty$ nicht, da die Eigenwerte $\lambda_{v,i}$ von S in (27) zur Modellierung von Führungs- und Störsignalen auf oder rechts der Imaginärachse liegen. Damit dieser Anteil keinen Beitrag zum Folgefehler liefert, muss

$$\begin{bmatrix} -Q & \mathcal{C} \end{bmatrix} \tilde{\phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n_v \tag{44}$$

erfüllt sein. Dies bedeutet, dass die Signalmodelleigenwerte $\lambda_{v,i}$ im Folgefehler $y - y_s$ nicht (modal) beobachtbar sein dürfen. Wenn (44) gilt, dann wird der zeitliche Verlauf des Folgefehlers nur durch den zweiten Summenterm in (43) bestimmt, der von den Eigenwerten $\tilde{\lambda}_i$ von $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$ abhängt. Darin können (modal) steuerbare Eigenwerte von $\mathcal{A}$, die zu aufklingenden oder zu langsam abklingenden Zeitverläufen führen, durch $\mathcal{K}$ verschoben werden. Um die Bedingung (44) für die Bestimmung von M_u in (30) auswerten zu können, müssen die Regelungseigenvektoren $\tilde{\phi}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n_v$, welche zu den Signalmodelleigenwerten $\lambda_{v,i}$ gehören, berechnet werden. Hierzu nimmt man eine Partionierung des Eigenvektors $\tilde{\phi}_i$ gemäß

$$\tilde{\phi}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{v,i} \\ \tilde{\phi}_{x,i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\phi}_{v,i} \in \mathbb{C}^{n_v}, \quad \tilde{\phi}_{x,i} \in H \tag{45}$$

vor. Setzt man dies in das Eigenwertproblem

$$\tilde{\mathcal{A}}_e \tilde{\phi}_i = \lambda_{v,i} \tilde{\phi}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_v \tag{46}$$

der Regelung ein, so erhält man mit (42) nach einer einfachen Umformung die Teilgleichungen

$$(\lambda_{v,i} I - S) \tilde{\phi}_{v,i} = 0 \tag{47}$$

und

$$(-\mathcal{G}P - \mathcal{B}(M_u + \mathcal{K}\mathcal{M}_x)) \tilde{\phi}_{v,i} + (\lambda_{v,i} I - \mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}) \tilde{\phi}_{x,i} = 0 . \tag{48}$$

Die erste Teilgleichung (47) ist gerade die charakteristische Gleichung der Matrix S, womit die Eigenvektoren $\phi_{v,i}$ von S die Lösungen von (47) sind, d. h. $\tilde{\phi}_{v,i} = \phi_{v,i} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n_v$, gilt. Damit lässt sich (48) in der Form

$$(\lambda_{v,i} I - \mathcal{A}) \tilde{\phi}_{x,i} = (\mathcal{G}P + \mathcal{B}M_u) \phi_{v,i} + \mathcal{B}\mathcal{K}(\mathcal{M}_x \phi_{v,i} - \tilde{\phi}_{x,i}) \tag{49}$$

anschreiben. Anhand dieser Gleichung erkennt man, wie der Aufschaltoperator $\mathcal{M}_x$ in (34) zu wählen ist, damit der Entwurf von M_u unabhängig vom Reglerentwurf wird. Gilt nämlich

$$\mathcal{M}_x \phi_{v,i} = \tilde{\phi}_{x,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_v \tag{50}$$

für $\mathcal{M}_x$, dann treten in (49) nur noch die Aufschaltmatrix M_u und Größen der Streckenbeschreibung auf. Damit lässt sich M_u direkt anhand der Streckenbeschreibung bestimmen, ohne die Regelung berücksichtigen zu müssen. Zur Bestimmung von $\tilde{\phi}_{x,i}$ in (49) unter der Annahme (50) muss man eine Operatorgleichung vom Typ

$$(\lambda I - \mathcal{A}) x = y, \quad y \in H, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{51}$$

lösen, die bei der Untersuchung des Spektrums von linearen Operatoren auftritt. Damit kann man für die Untersuchung der Lösbarkeit von (51) auf Ergebnisse der Funktionalanalysis zurückgreifen. Dort wird gezeigt, dass (51) die eindeutige Lösung

$$x = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} y \tag{52}$$

für beliebige rechte Seiten y aus H besitzt, falls λ ein Element der *Resolventenmenge* $\rho(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ ist (siehe z. B. [2]). Da der Systemoperator $\mathcal{A}$ ein diskretes Spektrum besitzt (d. h. sein Spektrum setzt sich nur aus isolierten Eigenwerten zusammen) ist die Resolventenmenge durch $\rho(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_{x,i}, i \geq 1\}$ gegeben, worin $\lambda_{x,i}$ die Eigenwerte von $\mathcal{A}$ sind. Damit ist (49) bei Berücksichtigung von (50) eindeutig lösbar, wenn kein Eigenwert $\lambda_{v,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n_v$, mit einem Streckeneigenwert $\lambda_{x,i}$, $i \geq 1$, übereinstimmt. Dieses Ergebnis ist unmittelbar plausibel, wenn man den endlich-dimensionalen Fall betrachtet. Dort kommt man zum selben Ergebnis, indem man den Operator $\mathcal{A}$ in (51) durch die Matrix A ersetzt sowie x und y als Vektoren des endlich-dimensionalen Euklidischen Vektorraums interpretiert. Damit folgt aus (49)

$$\tilde{\phi}_{x,i} = (\lambda_{v,i} I - \mathcal{A})^{-1} (\mathcal{G} P + \mathcal{B} M_u) \phi_{v,i}\,, \quad \lambda_{v,i} \in \rho(\mathcal{A})\,, \tag{53}$$

falls (50) gilt. Einsetzen von (45) in (44) und Verwendung von (53) führt auf

$$\mathcal{C}(\lambda_{v,i} I - \mathcal{A})^{-1} (\mathcal{G} P + \mathcal{B} M_u) \phi_{v,i} = Q \phi_{v,i}\,. \tag{54}$$

Diese Beziehung lässt sich mit dem Übertragungsverhalten der Strecke (10)–(11) in Verbindung bringen. Hierzu führt man die durch

$$y(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} u(s) = F(s) u(s) \tag{55}$$

$$y(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{G} d(s) = F_d(s) d(s) \tag{56}$$

definierten Übertragungsmatrizen $F(s)$ und $F_d(s)$ ein, die für $s \in \rho(\mathcal{A})$ existieren (siehe z. B. [2]). Da vorausgesetzt wurde, dass kein Signalmodelleigenwert $\lambda_{v,i}$ mit den Streckeneigenwerten $\lambda_{x,i}$, $i \geq 1$, übereinstimmt, kann man $F(s)$ und $F_d(s)$ bei $s = \lambda_{v,i}$ auswerten, weil dann beide Übertragungsmatrizen dort keine Pole besitzen. Damit lässt sich (54) auch gemäß

$$F(\lambda_{v,i}) M_u \phi_{v,i} = (Q - F_d(\lambda_{v,i}) P) \phi_{v,i} \tag{57}$$

darstellen. Die Beziehung (57) erlaubt eine anschauliche Deutung der Bedingung für die Führungs- und Störgrößenaufschaltung. Hierzu bestimmt man die Zustandstrajektorie

$$v(t) = \sum_{i=1}^{n_v} \phi_{v,i} e^{\lambda_{v,i} t} v_i^*(0) \tag{58}$$

des Signalmodells (27)–(29) mit $v_i^*(0) = \langle v(0), \psi_{v,i} \rangle_{\mathbb{C}^{n_v}}$ und den Eigenvektoren $\psi_{v,i}$ von $S^* = \overline{S^T}$. Es lässt sich zeigen, dass im stationären Zustand die Systemantwort der mit (30) vorgesteuerten Strecke durch

$$y_{M_u}(t) = \sum_{i=1}^{n_v} F(\lambda_{v,i}) M_u \phi_{v,i} e^{\lambda_{v,i} t} v_i^*(0) \tag{59}$$

gegeben ist. Setzt man darin (57) ein, so gilt

$$y_{M_u}(t) = \sum_{i=1}^{n_v} Q \phi_{v,i} e^{\lambda_{v,i} t} v_i^*(0) - \sum_{i=1}^{n_v} F_d(\lambda_{v,i}) P \phi_{v,i} e^{\lambda_{v,i} t} v_i^*(0)\,. \tag{60}$$

Die Beziehungen (59) und (60) machen deutlich, dass die Aufschaltung (30) im stationären Zustand wegen (57) die modellierten Führungsgrößen y_s (erster Term in (60)) und dazu überlagert die negative Streckenantwort auf die Störsignale d (zweiter Term in (60)) zur Kompensation der Störungen erzeugt. Voraussetzung hierfür ist, dass gemäß (59) die modellierten Führungs- und Störsignale stationär übertragen werden können. Dazu muss

$$\det F(\lambda_{v,i}) \neq 0 \tag{61}$$

in (59) gelten, d. h. kein Signalmodelleigenwert $\lambda_{v,i}$ darf mit einer *Übertragungsnullstelle* von $F(s)$ übereinstimmen (siehe [1]). Dann kann man (57) nach $M_u \phi_{v,i}$ auflösen

$$M_u \phi_{v,i} = F^{-1}(\lambda_{v,i})(Q - F_d(\lambda_{v,i}) P) \phi_{v,i} = p_{u,i} \quad i = 1, 2, \ldots, n_v\,, \tag{62}$$

worin zur Vereinfachung der Darstellung die rechte Seite durch die Vektoren $p_{u,i}$ abgekürzt wird. Schreibt man diese Gleichungen in der Matrixform

$$M_u \left[\phi_{v,1} \ \ldots \ \phi_{v,n_v}\right] = \left[p_{u,1} \ \ldots \ p_{u,n_v}\right], \tag{63}$$

so kann man nach M_u auflösen, da die Matrix S des Signalmodells diagonalähnlich ist und somit ihre Eigenvektoren $\phi_{v,i}$ linear unabhängig sind. Dies führt schließlich auf die Aufschaltmatrix

$$M_u = \left[p_{u,1} \ \ldots \ p_{u,n_v}\right] \left[\phi_{v,1} \ \ldots \ \phi_{v,n_v}\right]^{-1}, \tag{64}$$

worin die Vektoren $p_{u,i}$ durch (62) gegeben sind. Es lässt sich leicht nachweisen, dass die durch (64) gegebene Matrix nicht nur notwendig – wie gerade eben gezeigt – sondern auch hinreichend für die Erzielung der Eigenschaft (57) ist. Die Darstellung (64) hat noch den Vorteil, dass die in (62) auftretenden konstanten Matrizen $F(\lambda_{v,i})$ und $F_d(\lambda_{v,i})$ einfach durch analytische oder numerische Lösung eines Randwertproblems im Frequenzbereich bestimmt werden können (siehe [7]). Beispielsweise lassen sich diese Matrizen für den im Abschnitt 2 betrachteten Wärmeleiter symbolisch mit Hilfe von MAPLE berechnen, da die dabei auftretende Differentialgleichung konstante Koeffizienten besitzt. Ist der Systemoperator $\mathcal{A}$ ein Differentialoperator mit ortsabhängigen Koeffizienten, dann kann im Allgemeinen dieses Randwertproblem nur noch numerisch gelöst werden.

4 Entwurf des Folgereglers

Die Einstellung des Einschwingverhaltens der Regelgrößen y auf den durch (27) und (29) beschriebenen stationären Zustand ist Aufgabe des Folgereglers

$$\tilde{u}_R(t) = \mathcal{K}(x(t) - \mathcal{M}_x v(t)) \tag{65}$$

(siehe (32) sowie Bild 2). Hierzu müssen der Rückführoperator $\mathcal{K}$ (siehe (33)) und der Aufschaltoperator $\mathcal{M}_x$ (siehe (34)) bestimmt werden. Zum Entwurf des Aufschaltoperators $\mathcal{M}_x$ geht man von der Beziehung (50) aus. Um diese Beziehung anschaulich zu deuten, schreibt man sie mit (53) in der Form

$$\mathcal{M}_x\phi_{v,i} = (\lambda_{v,i}I - \mathcal{A})^{-1}(\mathcal{G}P + \mathcal{B}M_u)\phi_{v,i}$$
$$\lambda_{v,i} \in \rho(\mathcal{A}), \quad i = 1, 2, \ldots, n_v \tag{66}$$

und betrachtet die Bildung des Sollwertes

$$x_s(t) = \mathcal{M}_x v(t) \tag{67}$$

für den Zustand (siehe (65)). Setzt man hierin (58) ein und beachtet (66), so gilt

$$x_s(t) = \sum_{i=1}^{n_v}(\lambda_{v,i}I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{G}P\phi_{v,i}e^{\lambda_{v,i}t}v_i^*(0) + \sum_{i=1}^{n_v}(\lambda_{v,i}I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}M_u\phi_{v,i}e^{\lambda_{v,i}t}v_i^*(0)\,. \tag{68}$$

Dies bedeutet, dass durch (67) gerade der Zustandsverlauf im stationären Zustand bei Einwirkung der Störung d (erster Summand) und der Zustandsverlauf bei Führungs- und Störgrößenaufschaltung (zweiter Summand) generiert werden. Zur Bestimmung von $\mathcal{M}_x$ schreibt man (50) in der Form

$$\mathcal{M}_x\left[\phi_{v,1} \ldots \phi_{v,n_v}\right] = \left[\tilde{\phi}_{x,1} \ldots \tilde{\phi}_{x,n_v}\right]. \tag{69}$$

Weil die Eigenvektoren $\phi_{v,i}$ von S linear unabhängig sind, lässt sich (69) nach $\mathcal{M}_x$ auflösen

$$\mathcal{M}_x = \left[\tilde{\phi}_{x,1} \ldots \tilde{\phi}_{x,n_v}\right]\left[\phi_{v,1} \ldots \phi_{v,n_v}\right]^{-1}. \tag{70}$$

Darin können die Funktionen $\tilde{\phi}_{x,i}$ mittels (53) durch Lösung eines Randwertproblems im Frequenzbereich berechnet werden, die man auch zur Bestimmung der konstanten Matrizen $F(\lambda_{v,i})$ und $F_d(\lambda_{v,i})$ benötigt (siehe (55)–(56)). Entsprechend zur Aufschaltmatrix M_u lässt sich nachweisen, dass (70) auch hinreichend für die Erzeugung des Sollwertes x_s ist. Um den Rückführoperator $\mathcal{K}$ (siehe (33)) zu berechnen, bestimmt man die Dynamik des Folgefehlers

$$e_x(t) = x(t) - x_s(t) = x(t) - \mathcal{M}_x v(t)\,. \tag{71}$$

Zeitliche Ableitung von (71) liefert

$$\dot{e}_x(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) + \mathcal{G}Pv(t) - \mathcal{M}_x Sv(t)\,, \tag{72}$$

worin (10) und (27)–(28) eingesetzt wurden. Dies lässt sich durch eine einfache Umformung auch in der Form

$$\dot{e}_x(t) = \mathcal{A}e_x(t) + \mathcal{B}(u(t) - M_u v(t)) - (\mathcal{M}_x S - \mathcal{A}\mathcal{M}_x - \mathcal{B}M_u - \mathcal{G}P)v(t) \tag{73}$$

darstellen. Da man leicht zeigen kann, dass die Aufschaltmatrix M_u und der Aufschaltoperator $\mathcal{M}_x$ Lösungen der *regulator equations*

$$\mathcal{M}_x S - \mathcal{A}\mathcal{M}_x = \mathcal{B}M_u + \mathcal{G}P \tag{74}$$
$$\mathcal{C}\mathcal{M}_x = Q \tag{75}$$

sind (siehe [1]), gilt für (73)

$$\dot{e}_x(t) = \mathcal{A}e_x(t) + \mathcal{B}(u(t) - M_u v(t))\,. \tag{76}$$

Berücksichtigt man hierin $u - M_u v = -\tilde{u}_R$ (siehe Bild 2) und führt $u_R = -\tilde{u}_R$ ein, dann lautet das *Folgefehlersystem*

$$\dot{e}_x(t) = \mathcal{A}e_x(t) + \mathcal{B}u_R(t), \quad e_x(0) \in H\,. \tag{77}$$

Dieses wird durch die *Folgefehlerrückführung*

$$u_R(t) = -\mathcal{K}e_x(t) \tag{78}$$

geregelt, was auf das *geregelte Folgefehlersystem*

$$\dot{e}_x(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K})e_x(t) \tag{79}$$

führt. Wie man sieht, ist die Dynamikvorgabe für (77) bzw. der Entwurf von $\mathcal{K}$ unabhängig von der Führungs- und Störgrößenaufschaltung. Da das Folgefehlersystem (77) wie die Strecke (10) zur Klasse der Riesz-Spektralsysteme gehört, ist es naheliegend den Rückführoperator $\mathcal{K}$ durch Eigenwertvorgabe zu entwerfen. Diese Aufgabenstellung lässt sich mit der in [3; 4] vorgestellten *Vollständigen Modalen Synthese für verteilt-parametrische Systeme* lösen. Hierzu macht man für die *Rückführfunktionen* k_i in (33) den Ansatz

$$k_i(z) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^*\psi_{x,j}(z), \; n < \infty, \; i = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{80}$$

worin $\psi_{x,j}$ die Eigenvektoren des adjungierten Systemoperators $\mathcal{A}^*$ sind. In [3; 4] wird gezeigt, dass ein Rückführoperator $\mathcal{K}$ mit den Rückführfunktionen (80) lediglich die Eigenwerte $\lambda_{x,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, und ihre Eigenvektoren $\phi_{x,i}$ in der Regelung beeinflussen kann. Hierzu ist zu fordern, dass die Eigenwerte $\lambda_{x,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, (modal) steuerbar sind (siehe [2]) und deshalb durch Zustandsrückführung verschoben werden können. Geht man davon aus, dass $\lambda_{x,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, alle Eigenwerte von $\mathcal{A}$ beinhaltet, die in der abgeschlossenen rechten Halbebene liegen, dann lässt sich die Fehlerdynamik durch (78) exponentiell stabilisieren. Die Bestimmung der Koeffizienten k_{ij}^* in (80) erfordert die Lösung eines nichtlinearen Eigenwertvorgabeproblems. Dieses besitzt eine geschlossene Lösung, wenn man von der Eigenwertvorgabe zur kombinierten Eigenwert- und Parametervektorvorgabe übergeht. Für diese Vorgabegrößen lässt sich die geschlossene Lösung

$$\overline{K^*} = \begin{bmatrix} \overline{k_{11}^*} & \ldots & \overline{k_{1n}^*} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{k_{m1}^*} & \ldots & \overline{k_{mn}^*} \end{bmatrix} = \left[p_1 \ldots p_n\right]\left[\tilde{v}_1 \ldots \tilde{v}_n\right]^{-1} \tag{81}$$

mit

$$\tilde{v}_i = (\Lambda - \tilde{\lambda}_{n_v+i}I)^{-1}B^*p_{n_v+i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{82}$$

und $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_{x,1}, \ldots, \lambda_{x,n})$ angeben, welche die Eigenwerte $\lambda_{x,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, des Folgefehlersystems (77) nach

$\tilde{\lambda}_{n_v+i}$ verschiebt. Die nach der Eigenwertvorgabe noch vorhandenen Freiheitsgrade sind in den *Parametervektoren* p_{n_v+i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, enthalten und können verwendet werden, um weitere Eigenschaften der Fehlerdynamik (79) zu beeinflussen (siehe [3; 4]).

5 Beispiel

Im Folgenden soll für den in Abschnitt 2 vorgestellten Wärmeleiter eine Führungs- und Störgrößenaufschaltung entworfen werden. Hierzu modelliert man mit dem Signalmodell

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v(t) \tag{83}$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v(t) \tag{84}$$

$$y_s(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v(t) \tag{85}$$

zwei sprungförmige Führungsgrößen y_s und eine Sinusstörung d mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 10$. Mit diesen Vorgaben kann die Führungs- und Störgrößenaufschaltung (30) nach Berechnung der Übertragungsmatrizen $F(s)$ und $F_d(s)$ mit MAPLE unmittelbar durch (64) in MATLAB bestimmt werden. Unabhängig davon lässt sich der Folgeregler (65) entwerfen. Eine modale Analyse der Strecke liefert die dominanten Streckeneigenwerte $\lambda_{x,1} = -9{,}87$, $\lambda_{x,2} = -39{,}5$ und $\lambda_{x,3} = -88{,}8$. Damit ist es ausreichend nur drei Regelungseigenwerte $\tilde{\lambda}_i$, $i = 5, 6, 7$, und die zugehörigen Parametervektoren des in [3] vorgestellten Entkopplungsentwurfs mit (81) vorzugeben, um eine hinreichend schnelle Fehlerdynamik zu erhalten. Die nach der Eigenwertvorgabe noch vorhandenen Freiheitsgrade werden dazu genutzt, die Eigenvektoren $\tilde{\phi}_{x,i}$, $i = 5, 6, 7$, von $\mathcal{A} - \mathcal{BK}$ gemäß der Forderungen

$$\mathcal{C}\tilde{\phi}_{x,5} = e_1,\ \mathcal{C}\tilde{\phi}_{x,6} = e_2 \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\tilde{\phi}_{x,7} = 0 \tag{86}$$

vorzugeben. Wegen (11) und (29) gilt mit (75) und (71) für den Folgefehler

$$y(t) - y_s(t) = \mathcal{C}x(t) - Qv(t) = \mathcal{C}x(t) - \mathcal{C}\mathcal{M}_x v(t) = \mathcal{C}e_x(t). \tag{87}$$

Setzt man in (87) die Lösung von (79) ein (siehe (26)), so ergibt sich mit den Regelungseigenwerten $\tilde{\lambda}_5 = -13$ und $\tilde{\lambda}_6 = -39{,}5$ sowie mit dem Regelungseigenwert $\tilde{\lambda}_7 = -20{,}1$ zur Kompensation einer Übertragungsnullstelle (siehe (86)) bei Vernachlässigung der unverschobenen Streckendynamik

$$y(t) - y_s(t) \approx \begin{bmatrix} e^{-13t}\langle e_x(0), \tilde{\psi}_{x,5}\rangle_H \\ e^{-39{,}5t}\langle e_x(0), \tilde{\psi}_{x,6}\rangle_H \end{bmatrix}, \tag{88}$$

worin $\tilde{\psi}_{x,5}$ und $\tilde{\psi}_{x,6}$ die Eigenvektoren des zu $\mathcal{A} - \mathcal{BK}$ adjungierten Operators für die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_5$ und $\tilde{\lambda}_6$ sind.

Da wegen (88) die Fehlerdynamik bezüglich jeder Regelgröße näherungsweise nur durch eine Eigenschwingung beeinflusst wird, kann das Führungs- und Störverhalten gezielt eingestellt werden. Zur Simulation der Regelung aus Bild 2 wird ein modales Approximationsmodell 30-ter Ordnung für die Strecke (10)–(11) mit der Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ verwendet. Die Vorgabe von zwei Führungssprüngen $y_{s,1}(t) = 3\sigma(t)$ und $y_{s,2}(t) = 1{,}5\sigma(t)$ sowie $d = 0$ entspricht der Signalmodellanfangsbedingung $v(0) = [0\ 0\ 3\ 1{,}5]^T$ und führt auf das in Bild 3 dargestellte Simulationsergebnis. Dort wird der exakte Entwurf der Führungsgrößenaufschaltung mit dem *early-lumping-Ansatz* verglichen, bei dem die Führungs- und Störgrößenaufschaltung sowie der Folgeregler anhand einer modalen Approximation der Ordnung $N = 3$ und $N = 7$ entworfen werden. Die Zeitverläufe in Bild 3 machen deutlich, dass der exakte Entwurf stationäre Genauigkeit der Regelung sichert. Beim early-lumping-Ansatz macht sich die vernachlässigte Streckendynamik in Form einer bleibenden Regelabweichung deutlich bemerkbar, die mit ansteigender Approximationsordnung kleiner wird. Erst bei Approximationsordnungen größer als $N = 15$ ist kaum noch ein Unterschied des Ergebnisses zwischen exaktem Entwurf und early-lumping bemerkbar. Verändert man die Anfangsbedingung des Signalmodells auf $v(0) = [200\ 200\ 0\ 0]^T$, dann wirkt nur eine Sinusstörung $d(t) = d_0 \sin(10t + \varphi_0)$ auf die Regelung aus Bild 2. Das resultierende Störverhalten ist im Bild 4 dargestellt. Wie man sieht, ergibt sich beim vorgestellten exakten Entwurfsverfahren die gewünschte asymptotische Störkompensation. Der im Vergleich zu y_2 langsamere Verlauf von y_1 resultiert aus der Ausgangsgrößenformung (88). Für niedrige Approximationsordnungen $N = 3$ und $N = 7$ liefert der klassische early-lumping-Ansatz keine zufriedenstellende asymptotische Störkompensation. Erst bei einer Appro-

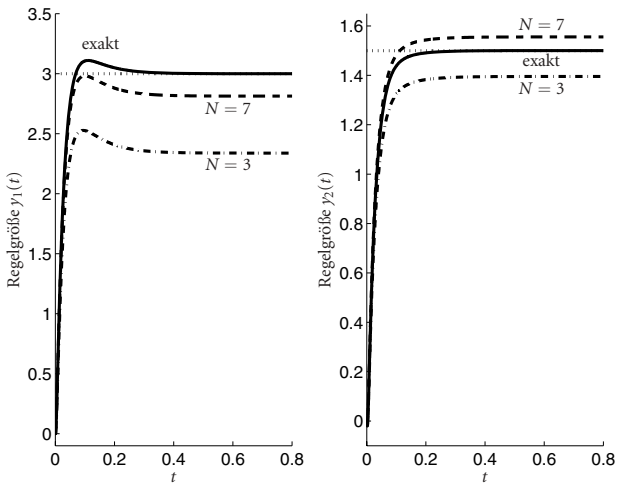

Bild 3 Führungsverhalten der Regelung aus Bild 2 bei Führungssprüngen $y_{s,1}(t) = 3\sigma(t)$ und $y_{s,2}(t) = 1{,}5\sigma(t)$ für den vorgestellten exakten Entwurf und early-lumping-Ansatz mit Approximationsordnungen $N = 3$ und $N = 7$.

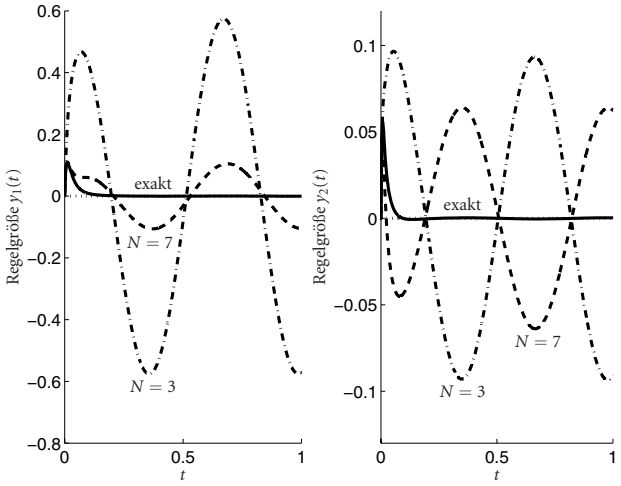

Bild 4 Störverhalten der Regelung aus Bild 2 bei Sinusstörung $d(t) = d_0 \sin(10t + \varphi_0)$ für den vorgestellten exakten Entwurf und early-lumping-Ansatz mit Approximationsordnungen $N = 3$ und $N = 7$.

ximationsordnung größer als $N = 15$ wird die Störung nahezu ausgeregelt.

6 Abschließende Bemerkungen

Die in Bild 2 dargestellte Regelung lässt sich nicht unmittelbar implementieren, da die Signalmodellzustände v und die Streckenzustände x im Allgemeinen nicht messbar sind. Der naheliegende Einsatz eines Beobachters zur Rekonstruktion dieser Zustände ist problematisch, da er unendlich-dimensional ist. Zu seiner Implementierung muss man eine endlich-dimensionale Approximation verwenden, was eine aufwändige Stabilitätsanalyse der resultierenden Regelung erfordert. Ein eleganter Ausweg aus dieser Problematik ist die Verwendung der in Bild 5 dargestellten *modellgestützten Vorsteuerung* (siehe z. B. [12]), bei der die Störgrößen d als messbar angenommen werden. Da auch die Führungsgrößen w bekannt sind, kann für das Signalmodell ein endlich-dimensionaler Beobachter entworfen werden, um die Signalmodellzustände v asymptotisch zu rekonstruieren. Besitzt das Modell der Strecke in der Vorsteuerung mindestens die Ordnung n, dann erzeugt die Vorsteuerung

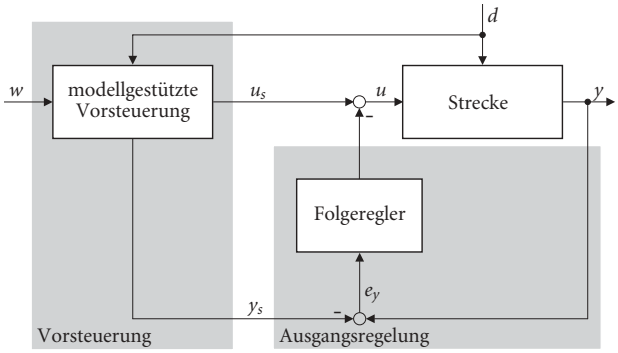

Bild 5 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung bestehend aus modellgestützter Vorsteuerung und Ausgangsregelung.

das gleiche Steuersignal u wie in Bild 2 (siehe [5]), das in Bild 5 als u_s bezeichnet wird. Die Ordnung des Modells muss dann nur so weit erhöht werden, dass auch y in Bild 2 hinreichend gut nachgebildet wird, woraus in Bild 5 y_s wird. Die Verwendung eines endlich-dimensionalen Approximationsmodells in der Vorsteuerung führt dabei nicht auf Stabilitätsprobleme, da der resultierende Modellfehler nur den Sollwert y_s verfälscht. Nicht messbare Störungen und Abweichungen von den Anfangsbedingungen des Modells in der Vorsteuerung müssen durch eine Ausgangsregelung berücksichtigt werden (siehe Bild 5).

Die im Beitrag vorgestellten Ergebnisse gelten auch unmittelbar für lineare konzentriert-parametrische Systeme, wenn man formal die Operatoren durch Matrizen ersetzt. Da die vorgeschlagene Vorsteuerung des Führungs- und Störverhaltens auch bei konzentriert-parametrischen Systemen die gleichen Vorteile wie bei verteilt-parametrischen Systemen besitzt, sind die vorgestellten Entwurfsverfahren auch für den endlich-dimensionalen Fall interessant. Die Ergebnisse des Beitrags lassen sich auch auf allgemeinere Fälle, wie nicht-diagonalisierbare Matrizen S oder gleiche Eigenwerte von S und $\mathcal{A}$, erweitern. Allerdings müssen dann verallgemeinerte Eigenvektoren von Riesz-Spektraloperatoren (siehe z. B. [9]) beim Entwurf einbezogen werden.

Literatur

[1] *C. Byrnes, I. Lauko, D. Gilliam und V. Shubov:* Output regulation for linear distributed-parameter systems. Trans. Aut. Control 45 (2000), S. 2236–2252.

[2] *R. F. Curtain und H. J. Zwart:* An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. Springer-Verlag, New York 1995.

[3] *J. Deutscher und C. Harkort:* Vollständige Modale Synthese eines Wärmeleiters. at-Automatisierungstechnik 56 (2008), S. 539–548.

[4] *J. Deutscher und C. Harkort:* Parametric state feedback design of linear distributed-parameter systems. Int. J. Control 82 (2009), S. 1060–1069.

[5] *J. Deutscher und C. Harkort:* Führungs- und Störgrößenaufschaltung für Riesz-Spektralsysteme. Technischer Bericht, Universität Erlangen-Nürnberg 2009.

[6] *O. Föllinger:* Regelungstechnik – Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 10. Auflage, Hüthig Verlag, Heidelberg 2008.

[7] *D. Franke:* Systeme mit örtlich verteilten Parametern. Springer-Verlag, Berlin 1986.

[8] *E.-D. Gilles:* Systeme mit verteilten Parametern. Oldenbourg Verlag, München 1973.

[9] *B. Z. Guo und H. J. Zwart:* Riesz spectral systems. Memorandum No. 1594, Universität Twente, 2001.

[10] *G. Kreisselmeier:* Struktur mit zwei Freiheitsgraden. at – Automatisierungstechnik 47 (1999), S. 266–269.

[11] *B. Lohmann:* Zur Störgrößenaufschaltung im Zustandsraum. Tagungsband GMA Fachausschuss 1.4 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“, Thun, 1999, S. 203–215.

[12] *G. Roppenecker:* Zustandsregelung linearer Systeme – Eine Neubetrachtung. at – Automatisierungstechnik 57 (2009), S. 491–498.

[13] *J. M. Schumacher:* Finite-dimensional regulators for a class of infinite-dimensional systems. Sys. Contr. Lett. 3 (1983), S. 7–12.

Manuskripteingang: 5. Juni 2009

Dr.-Ing. Joachim Deutscher ist Akademischer Rat und Habilitand am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Universität Erlangen-Nürnberg. Hauptarbeitsgebiete: Lineare und nichtlineare Systeme endlicher und unendlicher Dimension.

Adresse: Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Cauerstraße 7, 91058 Erlangen,
E-Mail: joachim.deutscher@rt.eei.uni-erlangen.de

Dipl.-Ing. Christian Harkort ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Universität Erlangen-Nürnberg. Hauptarbeitsgebiet: Lineare verteilt-parametrische Systeme.

Adresse: Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Cauerstraße 7, 91058 Erlangen,
E-Mail: christian.harkort@rt.eei.uni-erlangen.de