

Synchronisierung identischer linearer Systeme – ein Zugang über LMIs

Synchronization of Identical Linear Systems – an LMI Approach

Kim D. Listmann, Jürgen Adamy, TU Darmstadt,
Luca Scardovi, TU München

Zusammenfassung Dieser Beitrag stellt ein neues Verfahren zur Synchronisierung identischer linearer Systeme vor, die über statische Kommunikationsnetzwerke verbunden sind. Dazu wird das Entwurfsproblem auf ein simultanes Stabilisierungsproblem zurückgeführt. Aus diesem werden dann neue notwendige und hinreichende Bedingungen für den Entwurf abgeleitet. Diese sind konstruktiv, so dass auf Basis linearer Matrixungleichungen, geeignete Rückführungen für Multi-Agenten-Systeme mit stabilisierbarer Dynamik und zusammenhängendem Kommunikationsnetzwerk entworfen werden können. Es wird gezeigt, dass dies sogar dann möglich ist, wenn die Agenten nur einen Teil ihrer Zustandsinfor-

mation austauschen dürfen. ▶▶▶ **Summary** This article presents a new method for the synchronization of identical linear systems linked over static communication channels. Based on a transformation of the synchronization problem into a simultaneous stabilization problem novel and constructive necessary and sufficient conditions are obtained. By using linear matrix inequalities, appropriate feedback design is facilitated for all multi-agent systems with stabilizable dynamics and connected communication topologies. In addition to full-state coupling, synchronization is also achieved if only a part of the state of each agent is communicated over the network.

Schlagwörter Synchronisierung, simultane Stabilisierung, lineare Systeme, LMIs ▶▶▶ **Keywords** Synchronization, simultaneous stabilization, linear systems, LMIs

1 Einleitung

Innerhalb des letzten Jahrzehnts erfährt die Regelung von vernetzten dynamischen Systemen, sogenannter Agenten, weltweit ein stetig wachsendes Interesse. Das mag zum einen daran liegen, dass sie für viele zukünftige Anwendungen eine Rolle spielt (z. B. das Extremely Large Telescope des European Southern Observatory [25]), zum anderen aber, dass, trotz der Betrachtung einfacher dynamischer Systeme, die Vernetzung die Komplexität des Gesamtsystems wesentlich erhöht [2]. Dies hat dazu geführt, dass es noch immer keine geschlossene Theorie zur Lösung solcher Probleme gibt.

Grundlegend für viele Probleme dieser Art ist die Synchronisierung der Agenten, d. h. die Einigung auf einen gemeinsamen Zustand. War dieser anfangs – beim Konsensproblem [24] – noch stationär, so ergibt sich schon bei der Synchronisierung von Agenten mit allgemeiner

linearer Dynamik eine zeitabhängige Trajektorie. Dies ist offensichtlich, wenn man bedenkt, dass die Regelgesetze nur von lokaler Information¹, d. h. Zustandsdifferenzen bezüglich der vernetzten Nachbarn, abhängen dürfen. Folglich wird im Falle einer Synchronisierung die Stellgröße zu Null, so dass die Bewegung der Agenten durch eine ungesteuerte Differentialgleichung beschrieben werden kann.

Die Verwendung rein lokaler Information führt letztlich zur *vollständigen Informationsrückführung*, d. h., es dürfen sämtliche Zustandsinformationen über das Netzwerk ausgetauscht werden. In vorangegangenen

¹ Der Begriff *lokal* bezieht sich hier auf die Umgebung (Nachbarn) im Netzwerk. Nur diese Information, z. B. der Abstand bezüglich der Nachbarn, ist zur Synchronisierung notwendig. Globale Information, z. B. der eigene Zustand selbst, ließe auch eine direkte Stabilisierung der Agenten zu.

Arbeiten [9; 32; 35; 38] wurde gezeigt, dass sich der Reglerentwurf auf ein simultanes Stabilisierungsproblem zurückführen lässt. Dieses lässt sich mittels eines eingeschränkten LQ-Entwurfs lösen [32]. Allerdings basiert dieser ohnehin eingeschränkte Entwurf zusätzlich nur auf einer hinreichenden Bedingung zur Synchronisierung.

Möchte man zusätzlich nur lokal messbare, also limitierte, Informationen zur Synchronisierung verwenden, so führt dies auf die *partielle Informationsrückführung*. Neben der Anwendung auf eingeschränkte Systemklassen [22; 33; 36] erweist sich die statische, partielle Informationsrückführung als unbrauchbar, so dass eine dynamische Erweiterung der Regler notwendig ist. Diese geschieht meist durch Verwendung von vollständigen Beobachtern [7; 15; 36] und hat zum Nachteil, dass mehr Information über das Netzwerk kommuniziert werden muss. Umgangen wird dieser Nachteil einerseits durch Verwendung von Störgrößenbeobachtern [37], andererseits durch eine allgemeine dynamische partielle Informationsrückführung [28]. In beiden Ergebnissen bestehen jedoch erneut Beschränkungen an die Agentendynamik. Beispielsweise dürfen keine exponentiell instabilen Eigenwerte auftreten und es werden nicht alle vorhandenen Entwurfsfreiheitsgrade genutzt [28].

Die vorliegende Arbeit stellt für beide Arten der Rückführung einen neuen Entwurf auf Basis von notwendigen und hinreichenden Bedingungen vor, der letztlich eine numerische Lösung des Entwurfsproblems mittels linearer Matrixungleichungen (LMIs) [5] erzwingt. Betrachtet werden dazu Agenten mit allgemeiner linearer Dynamik, verbunden über ein statisches Kommunikationsnetzwerk. Durch Umformung auf ein simultanes Stabilisierungsproblem lässt sich zeigen, dass im Falle der vollständigen Informationsrückführung ein Regler für alle Agenten mit stabilisierbarer Dynamik existiert und entworfen werden kann und für die partielle Informationsrückführung lediglich eine Bedingung an die Detektierbarkeit der gemessenen Information hinzugenommen werden muss. Damit unterliegt die Agentendynamik keinerlei Beschränkungen an die Lage der Eigenwerte und es können auch exponentiell instabile Systeme synchronisiert werden. Die Methode setzt allerdings die Kenntnis der Netzwerktopologie voraus.

Zur Vorbereitung des Entwurfs werden im nächsten Abschnitt die notwendigen Grundlagen zur Graphentheorie und Linearen Algebra wiederholt. In Abschnitt 3 werden systemtheoretische Eigenschaften der Informationsrückführung beschrieben, die erneut die Entstehung einer Synchronisierungstrajektorie veranschaulichen. Abschnitt 4 zeigt dann den Übergang von einem Synchronisierungsproblem zu einem simultanen Stabilisierungsproblem und den Entwurf der vollständigen Informationsrückführung. Die Erweiterung zur partiellen Informationsrückführung erfolgt in Abschnitt 5. Vor dem Abschluss des Beitrags in Abschnitt 7 wird die Methode anhand der Synchronisierung von Flugzeugen mit instabiler Dynamik in Abschnitt 6 veranschaulicht.

2 Grundlagen

2.1 Graphentheorie

Zentral zur formalen Beschreibung des Kommunikationsnetzwerkes der Agenten sind Graphen. Insbesondere gerichtete Graphen, da davon ausgegangen wird, dass Informationsaustausch im Allgemeinen auch nur unidirektional stattfinden muss. Eine gute Einführung in diesen Teil der Graphen und ihre Eigenschaften gibt [30].

Ein *gerichteter Graph* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}})$ besteht aus *Knoten* $\mathcal{V}_{\mathcal{G}} = \{v_1, \dots, v_N\}$ und geordneten Paaren (v_i, v_j) mit $i, j \in \{1, \dots, N\}$ den *Kanten* $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$. Der gerichtete Informationsfluss eines Paares (v_i, v_j) erfolgt also von v_i nach v_j . In diesem Artikel beschränken wir uns auf *endliche Graphen*, d. h. $|\mathcal{V}_{\mathcal{G}}| < \infty$, ohne *Schleifen* $(v_i, v_i) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ oder *Mehrfachkanten*. Daraus folgt unmittelbar $|\mathcal{E}_{\mathcal{G}}| < \infty$. Wesentlich zur Charakterisierung des Informationsflusses ist folgende Definition.

Definition 1. Gegeben sei ein gerichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}})$. Ein Pfad der Länge k ist eine Sequenz verschiedener Knoten v_i, \dots, v_{i+k} , so dass $(v_j, v_{j+1}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ für jedes $j \in \{i, \dots, i+k-1\}$ gilt. Existiert ein Pfad vom Knoten v_j zum Knoten v_i , so heißt v_i *erreichbar* von v_j .

Damit ist es möglich, den Zusammenhang oder die Verbundenheit eines gerichteten Graphen zu beschreiben.

Definition 2. Ein gerichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}})$ heißt *vollständig zusammenhängend*, wenn für alle Knotenpaare $v_i, v_j \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$, $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ und $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ gilt. Er heißt *stark zusammenhängend*, wenn jedes Knotenpaar gegenseitig erreichbar ist und *zusammenhängend*, wenn mindestens ein Knoten existiert, so dass alle anderen Knoten von dort erreichbar sind. Knoten dieser Art heißen *Wurzelknoten*.

Eine Möglichkeit die Eigenschaften von Graphen einfach aber effektiv zu nutzen, ist durch die zu ihnen assoziierten Matrizen gegeben. Dies wird auch als *spektrale* oder *algebraische Graphentheorie* [8; 12] bezeichnet. Die *Adjazenzmatrix* $\mathbf{A}_{\mathcal{G}} = [a_{\mathcal{G}ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ charakterisiert dabei die Nachbarschaft der einzelnen Knoten. Ihre Elemente sind gegeben durch

$$a_{\mathcal{G}ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \\ 0, & (v_i, v_j) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{G}}. \end{cases} \quad (1)$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die wichtigste Matrix im Zusammenhang mit Synchronisierungsproblemen, die *Laplacematrix* $\mathbf{L}_{\mathcal{G}} = [l_{\mathcal{G}ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, als

$$l_{\mathcal{G}ij} = \begin{cases} -a_{\mathcal{G}ji}, & i \neq j, \\ \sum_{j=1}^N a_{\mathcal{G}ji}, & i = j. \end{cases} \quad (2)$$

Ihre Bedeutung wird später bei Betrachtung des geschlossenen Regelkreises offenkundig (siehe auch [17]). Offensichtlich folgt aus (2), dass $\mathbf{L}_{\mathcal{G}} \mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ ist. Dabei bezeichnet $\mathbf{1}_N = [1 \dots 1]^T$ den N -dimensionalen Einsvektor

und $\mathbf{0}$ den Nullvektor bzw. eine Nullmatrix geeigneter Dimension je nach Kontext. D.h., Null ist immer ein Eigenwert der Laplacematrix mit dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{1}_N$. Über die (algebraische) Vielfachheit dieses Eigenwertes gibt folgender Satz Auskunft.

Satz 1 ([16]). Gegeben sei ein gerichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}})$. $\lambda_1(\mathbf{L}_{\mathcal{G}}) = 0$ ist genau dann ein einfacher Eigenwert, wenn \mathcal{G} zusammenhängend ist.

Verwendet man dazu die Ergebnisse aus [1], so lässt sich eine Reihung der Realteile der Eigenwerte der Laplacematrix eines zusammenhängenden Graphen angeben:

$$0 < \Re\{\lambda_2(\mathbf{L}_{\mathcal{G}})\} \leq \dots \leq \Re\{\lambda_N(\mathbf{L}_{\mathcal{G}})\} \leq 2(N-1). \quad (3)$$

Sämtliche weitere Eigenwerte besitzen also einen positiven Realteil. Diese Eigenschaft wird vor allem für die Lösung des simultanen Stabilisierungsproblems in den Abschnitten 4 und 5 ausgenutzt. Außerdem definieren wir zur Vereinfachung $\sigma_i := \Re\{\lambda_i(\mathbf{L}_{\mathcal{G}})\}$ für $i \in \{1, \dots, N\}$.

2.2 Matrizen

In diesem Beitrag werden Agenten mit linearer Dynamik betrachtet. Zur Zusammenfassung aller Agenten in einer Gesamtdynamik des Multi-Agenten-Systems eignet sich das *Kroneckerprodukt* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ zweier Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} . Allgemeine Eigenschaften und Rechenregeln finden sich in [34]; wir beschränken uns hier auf die wichtigsten Elemente. Allgemein gilt für Matrizen mit geeigneten Dimensionen

$$\text{Rg}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{Rg}(\mathbf{A})\text{Rg}(\mathbf{B}),$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}.$$

Insbesondere erhält man mit der p -dimensionalen Einheitsmatrix \mathbb{I}_p bei geeigneter Dimension von \mathbf{A}, \mathbf{B}

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbb{I}_n)(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A} \otimes \mathbb{I}_n). \quad (4)$$

Im Weiteren wird abkürzend für das links- und rechtsseitige Kroneckerprodukt mit einer Einheitsmatrix die Notation $\widehat{\mathbf{A}}_n := \mathbf{A} \otimes \mathbb{I}_n$ und $\widetilde{\mathbf{A}}_N := \mathbb{I}_N \otimes \mathbf{A}$ eingeführt. Es sei dazu angemerkt, dass das rechtsseitige Kroneckerprodukt mit der Einheitsmatrix auf eine Blockdiagonalstruktur der resultierenden Matrix führt.

Da innerhalb dieses Beitrags auch die Stabilitätstheorie von Ljapunov angewendet wird, benötigen wir abschließend noch zwei Ergebnisse zur Definitheit von Matrizen. Das Erste ist bekannt als *Schur Komplement*.

Lemma 1 ([14]). Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\mathbf{R} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{U} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T > \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} > \mathbf{0}.$$

Dabei bedeutet $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, dass $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Das zweite Ergebnis, *Finslers Lemma*, ist weit weniger bekannt und geht auf [10] zurück.

Lemma 2 ([29]). Sei $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mit $\text{Rg}(\boldsymbol{\Sigma}) < n, \text{Rg}(\boldsymbol{\Lambda}) < n$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $\exists \boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{m \times p} : \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Sigma}^T < \mathbf{0}$
2. $\exists \mu \in \mathbb{R} : \boldsymbol{\Phi} - \mu \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma}^T < \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi} - \mu \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Lambda} < \mathbf{0}$

3 Vorüberlegungen zum Entwurf

3.1 Problembeschreibung

Betrachtet werden Agenten mit der Dynamik

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \quad (5a)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C} \sum_{j=1}^N a_{\mathcal{G}_{ji}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (5b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$, dem Ausgang $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^p$ und den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Die Einschränkung zur Verwendung rein lokaler und limitierter Information lässt sich also als Ausgang interpretieren, so dass für die Regelgesetze $\mathbf{u}_i = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i)$ gelten muss. Bei der vollständigen Informationsrückführung gilt dann speziell $\mathbf{C} = \mathbb{I}_n$ und bei der partiellen soll $\text{Rg}(\mathbf{C}) < n$ sein, sonst würde eine Matrix \mathbf{M} existieren, so dass $\mathbf{M}\mathbf{C} = \mathbb{I}_n$ gilt [33]. Allgemein lässt sich also folgendes Problem definieren:

Problem 1. Betrachte $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ Agenten mit der Dynamik (5) und finde einen Regler $\mathbf{u}_i = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i)$ so, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Fasst man die Zustände, Ausgänge und Eingänge aller Agenten jeweils im Vektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \dots \mathbf{x}_N^T]^T, \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T \dots \mathbf{y}_N^T]^T$ bzw. $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T \dots \mathbf{u}_N^T]^T$ zusammen, so erhält man als Dynamik des Gesamtsystems

$$\dot{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}_N \mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{B}}_N \mathbf{u}, \quad (6a)$$

$$\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{C}}_N \widehat{\mathbf{L}}_{\mathcal{G}} \mathbf{x}. \quad (6b)$$

Dessen systemtheoretische Eigenschaften sind entscheidend für den strukturbeschränkten Reglerentwurf. Da dieser als Ausgangsrückführung interpretiert werden kann, sind sowohl Steuer- als auch die Beobachtbarkeit zu untersuchen.

Satz 2. Das Matrizenpaar $(\widetilde{\mathbf{A}}_N, \widetilde{\mathbf{B}}_N)$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn es auch das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist.

Beweis. (\Leftarrow) Notwendig für die vollständige Steuerbarkeit von $(\widetilde{\mathbf{A}}_N, \widetilde{\mathbf{B}}_N)$ ist nach Kalman [20], dass

$$\text{Rg} \left(\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_N & \widetilde{\mathbf{A}}_N \widetilde{\mathbf{B}}_N & \dots & \widetilde{\mathbf{A}}_N^{N-1} \widetilde{\mathbf{B}}_N \end{bmatrix} \right) = Nn.$$

Für das Kroneckerprodukt gilt $\widetilde{\mathbf{A}}_N^k \widetilde{\mathbf{B}}_N = (\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{A}^k)(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{B}) = (\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{A}^k \mathbf{B})$, so dass obige Matrix als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \ddots & \dots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

geschrieben werden kann. Elementare Spalten- und Zeilenvertauschungen verändern den Rang einer Matrix nicht. Dies führt auf die Bedingung

$$\text{Rg}(\mathbb{I}_N \otimes [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{Nn-1}\mathbf{B}]) = Nn.$$

Nach erneuter Anwendung der Rechenregeln für das Kroneckerprodukt muss damit

$$\text{Rg}([\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{Nn-1}\mathbf{B}]) = n$$

gelten, da $\text{Rg}(\mathbb{I}_N) = N$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton [11] geht dies nur dann, wenn

$$\text{Rg}([\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = n.$$

(\Rightarrow) Nimmt man an, dass (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vollständig steuerbar ist, so ergibt sich der Beweis durch Anwendung obiger Argumente in umgekehrter Reihenfolge. \square

Satz 3. *Mindestens n Eigenwerte der Gesamtdynamik (6) sind nicht beobachtbar.*

Beweis. Vollständige Beobachtbarkeit im Sinne von Kalman [20] bedeutet, dass

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{L}}_G \widetilde{\mathbf{C}}_N \\ \widehat{\mathbf{L}}_G \widetilde{\mathbf{C}}_N \widetilde{\mathbf{A}}_N \\ \widehat{\mathbf{L}}_G \widetilde{\mathbf{C}}_N \widetilde{\mathbf{A}}_N^2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{L}}_G \widetilde{\mathbf{C}}_N \widetilde{\mathbf{A}}_N^{Nn-1} \end{pmatrix} = \text{Rg}(\mathbf{M}_B) = Nn.$$

Dabei wurde bereits die Vertauschbarkeit von links- und rechtsseitigem Kroneckerprodukt mit der Einheitsmatrix angewendet. Mit $\mathbf{L}_G \mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ ist $\text{Rg}(\mathbf{L}_G) \leq N-1$ und nach Anwendung der Rechenregeln für das Kroneckerprodukt $\text{Rg}(\widehat{\mathbf{L}}_G) \leq (N-1)n < Nn$. Außerdem gilt für beliebiges $k \in \{1, \dots, Nn-1\}$

$$\widehat{\mathbf{L}}_G \widetilde{\mathbf{C}}_N \widetilde{\mathbf{A}}_N^k = \mathbf{L}_G \otimes \widetilde{\mathbf{C}}_N \mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} l_{11} \mathbf{C}\mathbf{A}^k & \dots & l_{1N} \mathbf{C}\mathbf{A}^k \\ \vdots & & \vdots \\ l_{N1} \mathbf{C}\mathbf{A}^k & \dots & l_{NN} \mathbf{C}\mathbf{A}^k \end{bmatrix}.$$

D. h. $(\mathbf{L}_G \otimes \mathbf{C}\mathbf{A}^k) \mathbf{1}_{Nn} = \mathbf{0}$, so dass

$$\text{Rg}(\mathbf{L}_G \otimes \mathbf{C}\mathbf{A}^k) \leq (N-1)n < Nn.$$

Damit existiert ein nicht beobachtbarer Unterraum der mindestens die Dimension $\ker \mathbf{M}_B \geq n$ besitzt [19]. \square

Es zeigt sich also, dass nicht alle Eigenwerte durch die Informationsrückführung platziert werden können. Eine genauere Analyse (z. B. mittels Hautus-Kriterium zur Beobachtbarkeit) führt darauf, dass dies gerade die n Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind. D. h., ein Satz der Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} bleibt unverändert im geschlossenen Regelkreis enthalten. Dieser zeichnet sich dann auch für die Beschreibung der Synchronisierungstrajektorie verantwortlich. Solange \mathbf{A} instabile oder grenzstabile Eigenwerte

besitzt, kann das Gesamtsystem damit auch nicht stabilisiert werden, was aber zur Lösung des Problems 1 auch nicht notwendig ist.

4 Vollständige Informationsrückführung

Zuerst wird die vollständige Informationsrückführung zur Synchronisierung betrachtet, d. h. $\mathbf{C} = \mathbb{I}_n$. Das rein lokale Regelgesetz wird dabei als

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K} \sum_{j=1}^N a_{G_{ji}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (7)$$

angesetzt. Aus Problem 1 folgt dann die Frage für welches \mathbf{K} Synchronisierung erreicht wird. Die Antwort ergibt sich aus einem simultanen Stabilisierungsproblem.

4.1 Simultane Stabilisierung

Durch Verwendung des obigen Reglers (7) für jeden Agenten ist der geschlossene Gesamregelkreis des Multi-Agenten-Systems gegeben durch

$$\dot{\mathbf{x}} = (\widetilde{\mathbf{A}}_N + \widetilde{\mathbf{B}}_N \widetilde{\mathbf{K}}_N \widehat{\mathbf{L}}_G) \mathbf{x} = \mathbf{A}_{\text{voll}} \mathbf{x}. \quad (8)$$

Durch den Nullraum von \mathbf{L}_G ist nicht offensichtlich, wie \mathbf{K} gewählt werden muss, um zu synchronisieren. Dabei beschreibt die Synchronisierungstrajektorie einen Unterraum (gegeben durch $\ker \mathbf{L}_G$). Dass man dieses Problem als Stabilisierungsproblem auffassen kann, verdeutlicht Bild 1. Dies wurde bereits in den Arbeiten [9; 32] erkannt und die folgende Herleitung dient der Vollständigkeit. Die Idee ist, dass in geeigneten neuen Koordinaten der angegebene Nullraum der Laplacematrix verworfen werden kann. Dazu ist eine Reduktion der Dimension des Problems in den neuen Koordinaten notwendig. Diese wird durch eine Projektion der Gesamtdynamik erreicht, woraus schließlich ein simultanes Stabilisierungsproblem entsteht.

Dazu existiert immer eine Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ mit $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbb{I}_{N-1}$ und $\mathbf{Q}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ so, dass $\mathbf{Q}\mathbf{L}_G\mathbf{Q}^T = \mathbf{L}_G^* \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ gerade eine um den Nullraum von \mathbf{L}_G reduzierte Matrix ist. Zusätzlich existiert immer eine Matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ so, dass die Transformation $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}_G\mathbf{T}$ die Laplacematrix in ihre Jordan-Normalform, bezeichnet mit \mathbb{J}_{L_G} , überführt. Daraus folgt mit der Koordinatentransformation

$$\mathbf{z} = (\mathbf{Q}\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n) \mathbf{x} = \widehat{\mathbf{Q}}_n \widehat{\mathbf{T}}_n^{-1} \mathbf{x}, \quad (9)$$

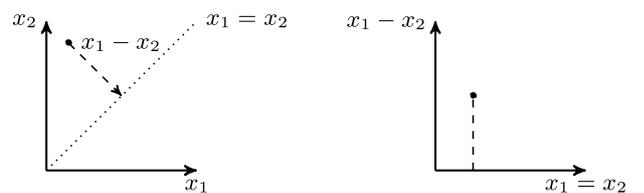


Bild 1 Projektion der Dynamik am Beispiel zweier Agenten mit je einem Zustand. Das Synchronisierungsproblem wird damit zu einem Stabilisierungsproblem.

wobei $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{(N-1)n}$, für deren zeitliche Ableitung

$$\dot{\mathbf{z}} = \left(\tilde{\mathbf{A}}_{N-1} - \mathbb{J}_{L_G}^* \tilde{\mathbf{B}}_{N-1} \tilde{\mathbf{K}}_{N-1} \right) \mathbf{z} = \mathbf{A}_{\text{voll}}^* \mathbf{z}. \quad (10)$$

Dabei ist die Anwendung der Rechenregeln des Kroneckerprodukts zu beachten. Insbesondere gilt aufgrund der Struktur von \mathbf{Q} , dass $\tilde{\mathbf{A}}_N \hat{\mathbf{Q}}_n^T = \hat{\mathbf{Q}}_n^T \tilde{\mathbf{A}}_{N-1}$. Die Struktur der resultierenden Matrix ist gegeben durch

$$\mathbf{A}_{\text{voll}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_2(L_G) \mathbf{B} \mathbf{K} & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A} - \lambda_N(L_G) \mathbf{B} \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

wobei $*$ Terme kennzeichnet, die keine Rolle bei der Lösung des Problems spielen. Je nach Vielfachheit der verbleibenden Eigenwerte der Laplacematrix sind diese hier Null oder $-\mathbf{B} \mathbf{K}$. Folgender Satz zeigt nun, dass es sich tatsächlich um ein simultanes Stabilisierungsproblem handelt.

Satz 4. Gegeben seien die Agenten mit der Dynamik (5) und der vollständigen Informationsrückführung (7). Synchronisierung wird genau dann erreicht, wenn die Matrizen $\mathbf{A} - \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{K}$ stabil $\forall i \in \{2, \dots, N\}$ sind.

Bevor dieser Satz bewiesen wird, benötigen wir noch folgendes Lemma (\mathbf{M}^H bezeichnet dabei die konjugiert transponierte der Matrix \mathbf{M}):

Lemma 3. Man betrachte die Matrizen $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und die komplexe Zahl $\lambda = \sigma + j\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Es gilt $(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{N}) + (\mathbf{M} - \lambda \mathbf{N})^H < \mathbf{0}$ genau dann, wenn $(\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N}) + (\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N})^T < \mathbf{0}$.

Beweis. (\Leftarrow) Es gilt mit $\lambda^H = \sigma - j\omega$, dass

$$(\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N}) + (\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N})^T - j\omega(\mathbf{N} - \mathbf{N}^T) < \mathbf{0}.$$

Beachtet man, dass $(\mathbf{N} - \mathbf{N}^T)^T = \mathbf{N}^T - \mathbf{N} = -(\mathbf{N} - \mathbf{N}^T)$, also die Matrix $(\mathbf{N} - \mathbf{N}^T)$ schiefsymmetrisch ist, so gilt $\mathbf{x}_i^T (\mathbf{N} - \mathbf{N}^T) \mathbf{x}_i = 0 \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$. Damit muss zur Erfüllung obiger Bedingung

$$(\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N}) + (\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N})^T < \mathbf{0}.$$

(\Rightarrow) Mit $(\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N}) + (\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N})^T < \mathbf{0}$ gilt auch

$$(\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N}) + (\mathbf{M} - \sigma \mathbf{N})^T + j\omega(\mathbf{N} - \mathbf{N} + \mathbf{N}^T - \mathbf{N}^T) < \mathbf{0}.$$

Dies lässt sich umformulieren zu

$$[\mathbf{M} - (\sigma + j\omega)\mathbf{N}] + [\mathbf{M} - (\sigma + j\omega)\mathbf{N}]^H + j\omega(\mathbf{N} - \mathbf{N}^T) < \mathbf{0}.$$

Obige Schiefsymmetrie führt dann zur Behauptung. \square

Bemerkung 1. Das Resultat ist eng mit der Tatsache verknüpft, dass Sesquilinearformen hermitescher Matrizen rein reell sind. Der positiv definite und alle semidefiniten Fälle ergeben sich analog.

Beweis von Satz 4. (\Rightarrow) Sind alle $\mathbf{A} - \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{K}$ stabil, so folgt mit Lemma 3 und aufgrund der oberen Dreiecksstruktur

von $\mathbf{A}_{\text{voll}}^*$, dass $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ für $t \rightarrow \infty$. Durch die Eigenschaften von \mathbf{Q} muss damit $\mathbf{x} \in \ker \hat{\mathbf{Q}}_n$. D. h., $\mathbf{x} = (\mathbf{1}_N \otimes \boldsymbol{\alpha})$ mit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ und somit $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\alpha} \quad \forall i$.

(\Leftarrow) Das Ergebnis folgt nach Anwendung derselben Argumente in umgekehrter Reihenfolge. \square

4.2 Reglerentwurf

Nachdem nun das Problem in ein simultanes Stabilisierungsproblem umgeformt wurde, muss eine Reglermatrix \mathbf{K} gefunden werden, so dass alle Matrizen $\mathbf{A} - \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{K}$ mit $i \in \{2, \dots, N\}$ stabil werden. Das Problem ist einem robusten Regelungsproblem aus [13] sehr ähnlich. Schon damals führte der Entwurf auf die Verwendung von Matrixungleichungen zur Beschreibung der Lösung. D. h. die Lösung kann lediglich numerisch bestimmt werden. Dies ist auch in unserem zentralen Ergebnis der Fall.

Satz 5. Betrachtet werden Agenten mit der Dynamik (5), vernetzt über ein statisches Kommunikationsnetzwerk. Es wird angenommen, dass das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) stabilisierbar und der gerichtete Graph, der das Kommunikationsnetzwerk beschreibt, zusammenhängend ist. Der Regler (7) mit $\mathbf{K} = \mathbf{V} \mathbf{X}^{-1}$, wobei $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, führt genau dann zur Synchronisierung, wenn

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T - \sigma_2 (\mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T - \sigma_N (\mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0}.$$

Beweis. (\Leftarrow) Unter Verwendung der vorherigen Resultate gilt, dass für alle $i \in \{2, \dots, N\}$, $\mathbf{A} - \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{K}$ stabil ist. Da zusätzlich Stabilisierbarkeit vorausgesetzt wurde, existieren Matrizen \mathbf{K} und $\mathbb{R}^{n \times n} \ni \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > \mathbf{0}$ so, dass

$$\mathbf{P}_i (\mathbf{A} - \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{K}) + (\mathbf{A} - \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P}_i < \mathbf{0}.$$

Die Anwendung einer Kongruenztransformation mit $\mathbf{X}_i = \mathbf{P}_i^{-1}$ führt auf

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_i \mathbf{A}^T - \sigma_i (\mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_i \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0}. \quad (12)$$

Wendet man zusätzlich Lemma 2 an, gilt

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_i \mathbf{A}^T - \mu \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{B}^T < \mathbf{0}.$$

Da $\mathbf{B} \mathbf{B}^T \geq \mathbf{0}$ und $\sigma_i \geq \sigma_2$, folgt

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_i \mathbf{A}^T - \mu \sigma_i \mathbf{B} \mathbf{B}^T \leq \mathbf{A} \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A}^T - \mu \sigma_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T < \mathbf{0}.$$

D. h., es existiert eine gemeinsame quadratische Ljapunovfunktion. Diese erhält man durch Lösung der Gleichung für $i = 2$ und wird im Folgenden mit $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ bezeichnet. Wird sie zusammen mit der Variablensubstitution $\mathbf{V} = \mathbf{K} \mathbf{X}$ in (12) eingesetzt, ergibt sich

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T - \sigma_i (\mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0}$$

für alle $i \in \{2, \dots, N\}$. Da $\mathbf{X} > \mathbf{0}$, kann die Rückführmatrix stets aus $\mathbf{K} = \mathbf{V} \mathbf{X}^{-1}$ berechnet werden.

(\Rightarrow) Angenommen, dass

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T - \sigma_2 (\mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T - \sigma_N (\mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0}$$

gilt, müssen die folgenden vier Fälle überprüft werden:

(i) $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T \geq \mathbf{0}$

Die Tatsache, dass $\sigma_i \geq \sigma_2$ ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T - \sigma_i (\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) \\ \leq \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T - \sigma_2 (\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0} \end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T < \mathbf{0}$ und $\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T < \mathbf{0}$

Man erhält mit $\sigma_i \leq \sigma_N$

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T - \sigma_i (\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) \\ \leq \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T - \sigma_N (\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0} \end{aligned}$$

(iii) $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T < \mathbf{0}$ und $\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T \geq \mathbf{0}$

Trivialerweise gilt

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T - \sigma_i (\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0}$$

$$\forall i \in \{2, \dots, N\}.$$

(iv) $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T < \mathbf{0}$

Ein zusammenhängender Graph bedeutet

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T - \sigma_i (\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) > \mathbf{0}$$

$\forall i \in \{2, \dots, N\}$. Dies widerspricht der Aussage des Satzes.

Somit gilt $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T - \sigma_i (\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T) < \mathbf{0} \forall i \in \{2, \dots, N\}$ und schließlich bei Rücksubstitution der Variablen, dass die Matrizen $\mathbf{A} - \sigma_i \mathbf{BK}$ sämtlich stabil sind. Anwendung von Lemma 3 und Satz 4 vervollständigen dann die Aussage. \square

Eine direkte Interpretation dieses Ergebnis ist, dass grundsätzlich die Kommunikationstopologie die Rückführung verstärkt ($\sigma_N \geq \sigma_2 > 1$) bzw. abschwächt ($\sigma_2 < 1$). D.h., im Fall instabiler Eigenwerte muss die Abschwächung, die nie schwächer ist als σ_2 , bekannt sein, um über die Rückführmatrix \mathbf{K} noch Stabilität zu gewährleisten. Andererseits kann eine Verstärkung der Rückführung, die nie stärker als σ_N ist, dazu führen, dass eigentlich stabile Eigenwerte in den instabilen Bereich wandern. Deshalb muss \mathbf{K} zusätzlich so gewählt werden, dass dies auszuschließen ist.

Bemerkung 2. Die Interpretation als robustes Regelungsproblem wird deutlich, wenn man bedenkt, dass alle σ_i innerhalb eines konvexen Gebiets liegen. Dessen Randpunkte sind gerade σ_2 und σ_N , und eine gemeinsame Stabilisierung der Randpunkte führt zu einer gemeinsamen Stabilisierung sämtlicher Punkte innerhalb des konvexen Gebiets.

Bemerkung 3. Offensichtlich ist für den Entwurf die Kenntnis der Kommunikationstopologie notwendig, da die Parameter σ_2, σ_N bekannt sein müssen. Man könnte also sagen, dass der Regler lokal, der Entwurf aber zentral ist. Die Abhängigkeit von diesen Parametern weiter zu verringern, ist eine Kernaufgabe für zukünftige Arbeiten. Dabei kann, wie in (3) ersichtlich, σ_N bereits nach oben

abgeschätzt werden. Für σ_2 existiert eine Abschätzung nach unten aber nur im Zusammenhang mit ungerichteten Graphen [4].

Bemerkung 4. Der gängige LQ-Entwurf [32] verwendet lediglich eine hinreichende Bedingung. Deutlich wird dies, wenn die damit erhaltene Rückführmatrix $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ in die Ljapunov-Gleichung eingesetzt wird:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + 2\sigma_i \mathbf{PB}^T \mathbf{BP} < \mathbf{0}.$$

Hierbei ist $\mathbf{PB}^T \mathbf{BP} \geq \mathbf{0}$. Dies würde in unserem Entwurf $\mathbf{BV} + \mathbf{V}^T \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ entsprechen und ist eben nur hinreichend aber *nicht* notwendig, da auch synchronisiert werden kann, wenn dies nicht erfüllt ist.

Bemerkung 5. Da die Entwurfsgleichungen LMIs darstellen [5], ist eine Lösung mit den Methoden der konvexen Optimierung [6] sehr effizient berechenbar.

Nachdem damit eine Lösung des Entwurfs der vollständigen Informationsrückführung gefunden wurde, soll das Verfahren hinsichtlich der Verwendung lokaler *und* limitierter Information erweitert werden. Dies führt wie o. a. auf die partielle Informationsrückführung und wird im folgenden Abschnitt gezeigt.

5 Partielle Informationsrückführung

Im Fall der partiellen Informationsrückführung hat jeder Agent nur noch Zugriff auf limitierte und lokale Information. Es hat sich gezeigt [26], dass dabei eine direkte statische Rückführung dieser Information im Allgemeinen nicht zur Synchronisierung führen wird. Beobachterbasierte Verfahren [7; 15; 36] führen andererseits zu einer Erhöhung des Kommunikationsaufwands, da die vom Beobachter rekonstruierten Variablen ebenfalls ausgetauscht werden müssen. Dies kann sich gerade bei geringer Übertragungsrate des Netzwerkes negativ auf die, in das System eingebrachte, Verzögerung auswirken. Derartige Verzögerungen können dann sogar dazu führen, dass eine Synchronisierung unmöglich wird [23].

Deshalb sollte der Kommunikationsaufwand so gering wie möglich gehalten werden. Dies ermöglicht die schon in [28] verwendete allgemeine dynamische partielle Informationsrückführung mit dem Regler

$$\dot{\mathbf{x}}_{c_i} = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_{c_i} + \mathbf{B}_c \mathbf{y}_i, \tag{13a}$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_{c_i} + \mathbf{D}_c \mathbf{y}_i \tag{13b}$$

mit $\mathbf{x}_{c_i} \in \mathbb{R}^r$ und \mathbf{y}_i aus (5b) mit $\text{Rg}(\mathbf{C}) < n$. Erweitert man die Zustandsdarstellung jedes Agenten mit dem Reglerzustand zu $\mathbf{x}_{E_i} = [\mathbf{x}_i^T \ \mathbf{x}_{c_i}^T]^T \in \mathbb{R}^{n+r}$, erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}_{E_i} = \mathbf{A}_E \mathbf{x}_{E_i} + \mathbf{B}_E \mathbf{y}_i,$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}_E \sum_{j=1}^N a_{G_{ji}} (\mathbf{x}_{E_i} - \mathbf{x}_{E_j})$$

mit

$$A_E = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ \mathbf{0} & A_c \end{bmatrix}, B_E = \begin{bmatrix} BD_c \\ B_c \end{bmatrix}, C_E = [C \quad \mathbf{0}].$$

Aufgrund der Struktur der Matrix C_E ist direkt erkennbar, dass lediglich die Information Cx_i an den Agenten i gesendet werden muss, d. h., der Kommunikationsaufwand ist der gleiche wie bei einer statischen partiellen Informationsrückführung.

5.1 Simultane Stabilisierung

Die Dynamik des geschlossenen Regelkreises für das gesamte Multi-Agenten-System ergibt sich damit als

$$\dot{x}_E = (\tilde{A}_{E,N} + \tilde{B}_{E,N} \tilde{C}_{E,N} \tilde{L}_{G,n+r}) x_E = A_{\text{part}} x_E.$$

Die Struktur dieser Gleichung ist also sehr ähnlich zum vollständigen Informationsrückführungsproblem in (8). Somit kann auch in diesem Fall das Entwurfsproblem auf ein simultanes Stabilisierungsproblem zurückgeführt werden. Nach Anwendung von Satz 4 wird dann gefordert, dass die Matrizen $A_E + \sigma_i B_E C_E$ für alle $i \in \{2, \dots, N\}$ stabil sind. Dabei ist nicht offensichtlich wie der Entwurf von A_c, B_c, C_c und D_c durchzuführen ist, da die Reglermatrizen zu jeder der Matrizen A_E, B_E und C_E beitragen. Doch auch in diesem Fall ist der Übergang zu einem LMI-Problem möglich.

5.2 Durchführung des Entwurfs

Zur einfachen Stabilisierung mittels allgemeiner dynamischer Ausgangsrückführungen schlägt [27] eine Variablensubstitution zusammen mit einer geeigneten Kongruenztransformation vor, die es ermöglicht, das Entwurfsproblem mittels LMIs darzustellen. Ausgehend von dieser Lösung wird hier nun eine, an unser simultanes Stabilisierungsproblem angepasste, Variablensubstitution vorgeschlagen, die dies ebenfalls ermöglichen wird. Allerdings, genau wie in [27], nur, wenn die Reglerordnung der Systemordnung der Agenten entspricht.

Allgemein suchen wir also eine Matrix $P = P^T$ so, dass

$$P > \mathbf{0}, \quad (14a)$$

$$P(A_E + \sigma_i B_E C_E) + (A_E + \sigma_i B_E C_E)^T P < \mathbf{0} \quad (14b)$$

für alle $i \in \{2, \dots, N\}$ gilt. Wir nehmen nun an, dass die Ljapunovmatrix und ihre Inverse gegeben sind durch

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & * \end{bmatrix} \quad (15)$$

mit $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $N, M \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Wiederum wird nach Anwendung der folgenden Kongruenztransformation der untere rechte Block keine Rolle spielen. Als Transformationsmatrix verwendet man

$$T = \begin{bmatrix} X & \mathbb{I}_r \\ M^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}, \quad (16)$$

so dass mit $PP^{-1} = \mathbb{I}_{n+r}$ gilt

$$P \begin{bmatrix} X \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YX + NM^T \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Dies führt zur Bedingung

$$MN^T = \mathbb{I}_n - XY. \quad (17)$$

Diese ist entscheidend zur Festlegung der Ordnung des Reglers: Für $r \geq n$ existieren stets geeignete Matrizen M und N , um dies zu erfüllen. D. h., es ist ausreichend $r = n$ zu wählen. Wählt man $r < n$, kann diese Bedingung allerdings nicht erfüllt werden [27].

Mit $r = n$ und der Kongruenztransformation

$$T^T P T > \mathbf{0},$$

$$T^T [P(A_E + \sigma_i B_E C_E) + (A_E + \sigma_i B_E C_E)^T P] T < \mathbf{0}$$

zusammen mit der Variablensubstitution

$$\begin{aligned} \bar{A} &= Y(A + \sigma_i B D_c C)X + Y B C_c M^T + \sigma_i N B_c C X \\ &\quad + N A_c M^T, \end{aligned}$$

$$\bar{B} = N B_c + Y B D_c,$$

$$\bar{C} = C_c M^T + \sigma_i D_c C X,$$

$$\bar{D} = D_c$$

ergeben sich aus (14) die LMIs

$$\begin{bmatrix} X & \mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & Y \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (18a)$$

$$\begin{bmatrix} U & S_0 + \sigma_i S_\sigma \\ S_0^T + \sigma_i S_\sigma^T & R_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (18b)$$

Der Übersichtlichkeit dienen dabei die Variablen

$$U := XA^T + AX + B\bar{C} + \bar{C}^T B^T, \quad (19a)$$

$$R_i := A^T Y + YA + \sigma_i (\bar{B}C + C^T \bar{B}^T), \quad (19b)$$

$$S_0 + \sigma_i S_\sigma := \underbrace{\bar{A}^T + A}_{=: S_0} + \sigma_i \underbrace{B\bar{D}C}_{=: S_\sigma}. \quad (19c)$$

Dieses LMI-Problem in den neuen Variablen $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ und \bar{D} ähnelt dem Problem in [27] sehr. Der Unterschied besteht lediglich in einer Abhängigkeit vom Parameter σ_i in unserem Fall. Das bedeutet aber gleichzeitig, dass für die Rücktransformation, zum Erhalt des Reglers mit A_c, B_c, C_c , und D_c , die σ_i bei der Lösung des LMI-Problems berücksichtigt werden müssen, die auch eine simultane Lösung für alle $i \in \{2, \dots, N\}$ zulassen. Die Lösung enthält folgender Satz (siehe auch [18]).

Satz 6. Gegeben seien N Agenten mit der Dynamik (5). Es gelte $\text{Rg}(C) < n$. Außerdem sei das Paar (A, B) stabilisierbar, das Paar (A, C) detektierbar und der, das Kommunikationsnetzwerk abbildende, gerichtete Graph zu-

sammenhängend. Wählt man $r = n$, so synchronisiert der Regler (13) mit

$$D_c = \bar{D}, \quad (20a)$$

$$C_c = (\bar{C} - \bar{D}C_X) (M^T)^{-1}, \quad (20b)$$

$$B_c = N^{-1} (\bar{B} - YB\bar{D}), \quad (20c)$$

$$A_c = N^{-1} [\bar{A} - Y(A - B\bar{D}C)X - YB\bar{C} - \bar{B}C_X] (M^T)^{-1} \quad (20d)$$

die Agenten genau dann, wenn die beiden LMIs

$$\begin{bmatrix} U & S_0 + \sigma_{\{2,N\}} S_\sigma \\ S_0^T + \sigma_{\{2,N\}} S_\sigma^T & R_{\{2,N\}} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

und zusätzlich (17) und (18a) erfüllt sind.

Beweis. (\Leftarrow) Synchronisierung bedeutet $x_i \rightarrow x_j$ für $t \rightarrow \infty$. Nach Anwendung von Satz 4 und Lemma 3 sind die Matrizen (18b) stabil $\forall i \in \{2, \dots, N\}$. Dann gilt mit Lemma 1

$$R_i = A^T Y + YA + \sigma_i (\bar{B}C + C^T \bar{B}^T) < 0. \quad (22)$$

Wird zusätzlich Lemma 2 angewendet, so ergibt sich

$$A^T Y + YA + \mu \sigma_i C^T C < 0.$$

Da der gerichtete Graph zusammenhängend ist, gilt $0 < \sigma_2 \leq \sigma_i \forall i \in \{2, \dots, N\}$. Zusammen mit $C^T C \geq 0$ gilt

$$A^T Y + YA + \mu \sigma_i C^T C \leq A^T Y + YA + \mu \sigma_2 C^T C < 0.$$

Die Existenz einer Lösung Y ist dabei durch die Detektierbarkeit von (A, C) gegeben. Für $i = 2$, kann diese, nach obiger Gleichung, erneut als gemeinsame Lösung $\forall i$ interpretiert werden. Für den zweiten Teil von Lemma 1 erhält man

$$U - (S_0 + \sigma_i S_\sigma) R_i^{-1} (S_0 + \sigma_i S_\sigma)^T = U - S_0 R_i^{-1} S_0^T - \sigma_i^2 S_\sigma R_i^{-1} S_\sigma^T - \sigma_i (S_0 R_i^{-1} S_\sigma^T + S_\sigma R_i^{-1} S_0^T) < 0$$

$\forall i \in \{2, \dots, N\}$. Beachtet man, dass durch (22) $R_i < 0$ ist, so gilt dies gleichermaßen für R_i^{-1} . Folglich ist $W_0 := S_0 R_i^{-1} S_0^T \leq 0$ und $W_\sigma := \sigma_i^2 S_\sigma R_i^{-1} S_\sigma^T \leq 0$, wobei die Tatsache $\sigma_i \geq 0 \forall i$ benutzt wurde. Schließlich ergibt sich

$$U - W_0 - W_\sigma - \sigma_i (S_0 R_i^{-1} S_\sigma^T + S_\sigma R_i^{-1} S_0^T) < 0.$$

Erneute Anwendung von Lemma 2 führt auf

$$U - W_0 - W_\sigma - \mu \sigma_i S_0^T S_0 \leq U - W_0 - W_\sigma - \mu \sigma_2 S_0^T S_0 < 0,$$

$$U - W_0 - W_\sigma - \mu \sigma_i S_\sigma^T S_\sigma \leq U - W_0 - W_\sigma - \mu \sigma_2 S_\sigma^T S_\sigma < 0.$$

Auch hier ist die Lösung für $i = 2$ eine gemeinsame Lösung $\forall i \in \{2, \dots, N\}$. Die Stabilisierbarkeit von (A, B) garantiert dabei die Existenz dieser gemeinsamen Lösung $X = X^T > 0$. Unter Einhaltung der Bedingung (17) impliziert dies schließlich die Existenz der Ljapunovmatrix aus (18a).

(\Rightarrow) Angenommen die LMIs (21) gelten, dann führt die Anwendung von Lemma 1 auf die vier Gleichungen

$$A^T Y + YA + \sigma_{\{2,N\}} (\bar{B}C + C^T \bar{B}^T) < 0,$$

$$U - W_0 - W_\sigma - \sigma_{\{2,N\}} (S_0 R^{-1} S_\sigma^T + S_\sigma R^{-1} S_0^T) < 0.$$

Zum Nachweis der negativen Definitheit für alle $i \in \{2, \dots, N\}$ müssen erneut vier Fälle betrachtet werden. In Analogie zum Beweis von Satz 5 erhält man daraus

$$A^T Y + YA + \sigma_i (\bar{B}C + (\bar{B}C)^T) < 0,$$

$$U - W_0 - W_\sigma - \sigma_i (S_0 R^{-1} S_\sigma^T + S_\sigma R^{-1} S_0^T) < 0$$

$\forall i \in \{2, \dots, N\}$. Die Anwendung von Lemma 3 und Satz 4 ergeben dann die Aussage des Satzes. \square

Bemerkung 6. In [39] werden zwar notwendige und hinreichende Bedingungen für die Synchronisierung durch partielle Informationsrückführung angegeben, allerdings basieren die entworfenen Regler auf der Rückführung der absoluten Ausgänge Cx_i jedes Agenten. Dies kommt, wie bereits erwähnt, den Möglichkeiten einer direkten Stabilisierung gleich. Der hier vorgestellte Regler verwendet dagegen ausschließlich Differenzen von Ausgängen zur Synchronisierung.

6 Beispiel

Da in nahezu allen bisherigen Veröffentlichungen exponentiell instabile Systeme von der Synchronisierung ausgeschlossen wurden, betrachtet dieses Beispiel explizit die Synchronisierung von Flugzeugen mit (exponentiell) instabiler Dynamik². Es handelt sich dabei um Grumman X-29 Versuchsflugzeuge der NASA aus den 1980er Jahren (s. Bild 2).

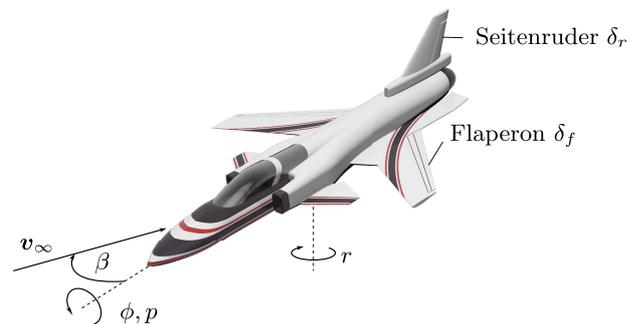


Bild 2 Grumman X-29A ein Flugzeug mit negativer Flügelpeilung.

Detaillierte lineare Zustandsraummodelle für viele verschiedene Arbeitspunkte, entkoppelt in Longitudinal- und Lateralodynamik, sind in [3] enthalten. Wir betrachten hier die Lateralodynamik mit dem Zustand $x_i = [p_i, r_i, \beta_i, \phi_i]^T$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$. Wie in Bild 2 zu se-

²Die Folgen für die Piloten bei Nachflug einer instabilen Trajektorie seien hier bedeutungslos.

hen, sind p und r die Roll- und Gierrate und β und ϕ bezeichnet man als Schiebe- und Rollwinkel. Die Eingangsgrößen $\mathbf{u}_i = [\delta_{f_i} \delta_{r_i}]^T$ der X-29 sind das Flaperon δ_{f_i} (eine Mischung aus Querruder und Wölbklappe) und das Seitenruder δ_{r_i} . Als Arbeitspunkt (s. [3]) wurde der ND-UA Flugmodus bei einer Höhe von 20 000 ft und einer Vorwärtsgeschwindigkeit von 0,7 Mach gewählt. Daraus resultiert die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} -2,59 & 0,997 & -16,55 & 0 \\ -0,1023 & -0,0673 & 6,779 & 0 \\ -0,0603 & -0,9928 & -0,1645 & 0,04413 \\ 1 & 0,07168 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 1,347 & 0,2365 \\ 0,09194 & -0,07056 \\ -0,0006141 & 0,0006866 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{G_{ji}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j).$$

Hinzu kommt noch das Kommunikationsnetzwerk der drei Flugzeuge. Dieses ist in Bild 3 gegeben und die Laplacematrix lautet dann

$$L_{G_{X-29}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Der LMI-basierte Entwurf, der hier nur für die partielle Informationsrückführung mittels Satz 6 durchgeführt wird, verwendet YALMIP [21] zusammen mit dem Solver SDPT3 [31] zur Lösung des Problems. Als Ergebnis erhält man den Regler

$$A_c = \begin{bmatrix} -7,1538 & 51,4099 & -1,1624 & -27,9273 \\ 0,7843 & -21,9656 & 3,1887 & 8,4115 \\ 0,4321 & -7,1964 & -0,0732 & 3,6085 \\ 0,4630 & 8,4102 & -0,0530 & -7,6075 \end{bmatrix}, \quad (23a)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -19,2467 & 49,9235 \\ 7,3184 & -19,1350 \\ 2,9994 & -6,1319 \\ -6,9660 & 8,2393 \end{bmatrix}, \quad (23b)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1,1951 & 5,2394 & -1,9823 & 3,3050 \\ -3,5965 & -28,4892 & -56,0115 & -0,2535 \end{bmatrix}, \quad (23c)$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -4,523 \times 10^{-7} & -1,785 \times 10^{-6} \\ -1,785 \times 10^{-6} & 1,245 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (23d)$$

Zu deren Berechnung verwenden wir die Bedingung

$$N = Y, \quad M = Y^{-1} - X.$$

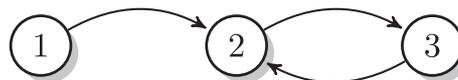


Bild 3 Kommunikationsnetzwerk der drei Grumman X-29A.

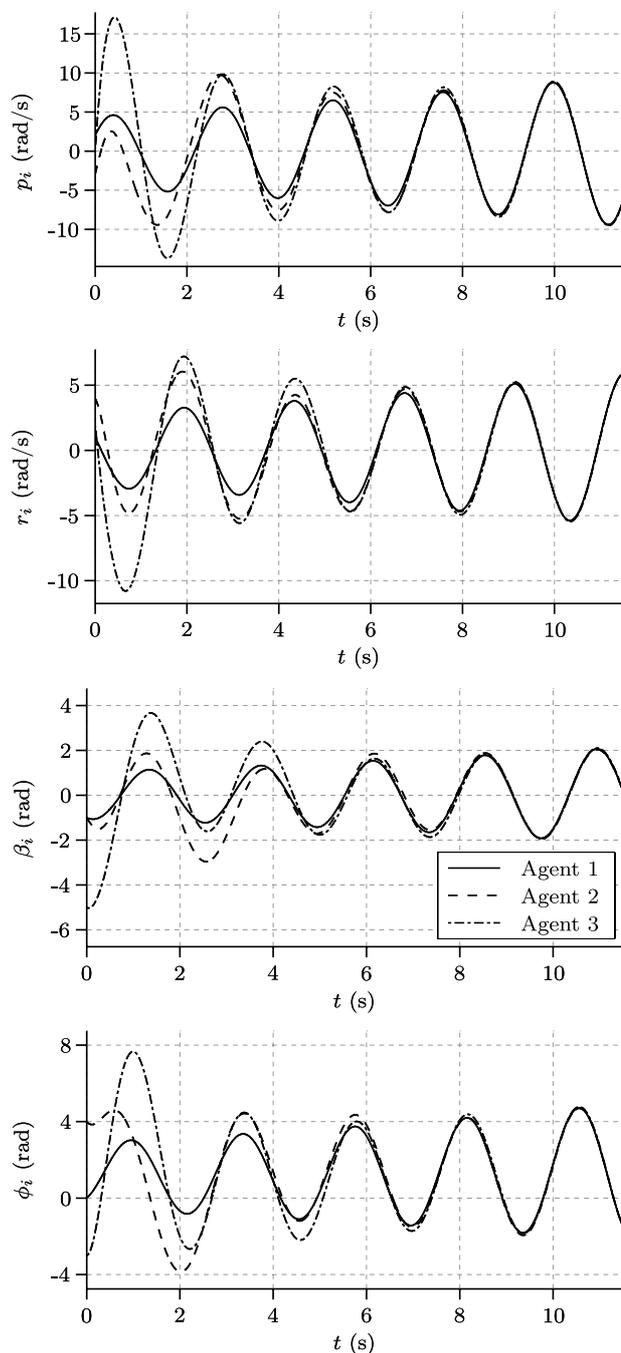


Bild 4 Synchronisierung der drei Grumman X-29A mit der allgemeinen dynamischen partiellen Informationsrückführung.

Zusammen mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}_c(t_0) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}(t_0) = [2 \ 1 \ -1 \ 0 \ -3 \ 4 \ -1 \ 4 \ 0 \ 2 \ -5 \ -3]^T$ ergibt sich damit der in Bild 4 dargestellte zeitliche Verlauf der Zustände aller Agenten. Eindeutig ist die Synchronisierung auf eine exponentiell instabile Trajektorie.

7 Fazit

Dieser Beitrag hat ein neues Verfahren zum Entwurf synchronisierender Regler für Agenten mit linearer Dynamik vorgestellt. Im Gegensatz zu bestehenden Verfahren basiert es auf einer notwendigen und hinreichenden Bedingung. Durch Umformung des Synchronisierungsproblems in ein simultanes Stabilisierungsproblem lassen sich diese Bedingungen in Form von LMIs angeben. Damit ist eine effiziente numerische Berechnung der Reglermatrizen gewährleistet. Außerdem benötigt der Entwurf keinerlei Einschränkungen hinsichtlich der Eigenwerte der Systemmatrizen. D. h., es können nun auch (exponentiell) instabile Systeme synchronisiert werden.

Für die Zukunft ist es sicherlich wichtig, das Verfahren unabhängiger von der Kenntnis des Kommunikationsnetzwerks zu machen. Für einen Einsatz unter realen Bedingungen wäre es ebenfalls wünschenswert, dass der Entwurf auch bei zeitvarianten Kommunikationsnetzwerken angewendet werden kann.

Danksagung

K. D. Listmann wurde gefördert im DFG GRK 1362 „Cooperative, Adaptive and Responsive Monitoring in Mixed Mode Environments“ (www.gkmm.tu-darmstadt.de).

Literatur

- [1] AGAEV, R. und P. CHEBOTAREV: *On the spectra of nonsymmetric Laplacian matrices*. Linear Algebra and its Applications, 399:157–168, 2005.
- [2] ALLGÖWER, F., R. BLIND, U. MÜNZ und P. WIELAND: *Communication networks in control: New dimensions of complexity*. In: *MATHMOD 09*, 2009. Plenarvortrag.
- [3] BOSWORTH, J. T.: *Linearized aerodynamic and control law models of the X-29A airplane and comparison with flight data*. NASA Technical Memorandum 4356, 1992.
- [4] BOYD, S. P.: *Convex optimization of graph Laplacian eigenvalues*. In: *International Congress of Mathematicians*, S. 1311–1319, 2006.
- [5] BOYD, S. P., L. E. GHAOUI, E. FERON und V. BALAKRISHNAN: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [6] BOYD, S. P. und L. VANDENBERGHE: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [7] CHEN, T., J. ZHU und Y. SHI: *Consensus of linear time-invariant multi-agent systems based on dynamic output feedback*. In: *21st Chinese Control and Decision Conference*, S. 4201–4205, 2009.
- [8] CHUNG, F. R. K.: *Spectral Graph Theory*. AMS, 1997.
- [9] FAX, J. A. und R. M. MURRAY: *Information flow and cooperative control of vehicle formations*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(9):1465–1476, 2004.
- [10] FINSLER, P.: *Über das Vorkommen definitiver und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen*. Commentarii Mathematici Helvetici, 9(1):188–192, 1936.
- [11] FISCHER, G.: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Vieweg + Teubner, 16. Aufl., 2008.
- [12] GODSIL, C. und G. ROYLE: *Algebraic Graph Theory*. Springer, 2001.
- [13] HORISBERGER, H. P. und P. R. BÉLANGER: *Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters*. IEEE Transactions on Automatic Control, 21(5):705–708, 1976.
- [14] HORN, R. A. und C. R. JOHNSON: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [15] LI, Z., Z. DUAN, G. CHEN und L. HUANG: *Consensus of multi-agent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 57(1):213–224, 2010.
- [16] LIN, Z., B. A. FRANCIS und M. MAGGIORE: *Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles*. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(1):121–127, 2005.
- [17] LISTMANN, K. D., J. ADAMY und C. A. WOOLSEY: *Backstepping zur Synchronisierung nichtlinearer dynamischer Systeme*. at – Automatisierungstechnik, 58(8):425–434, 2010.
- [18] LISTMANN, K. D. und L. SCARDOVI: *An LMI approach to synchronization of networks of linear systems*. In: *2012 American Control Conference*, 2012. eingereicht.
- [19] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 2*. Springer, 1995.
- [20] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer, 6. Aufl., 2010.
- [21] LÖFBERG, J.: *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab*. In: *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, S. 284–289, 2004.
- [22] MA, C.-Q. und J.-F. ZHANG: *Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 55(5):1263–1268, 2010.
- [23] PAPACHRISTODOULOU, A., A. JADBABAIE und U. MÜNZ: *Effects of delay in multi-agent consensus and oscillator synchronization*. IEEE Transactions on Automatic Control, 55(6):1471–1477, 2010.
- [24] REN, W., R. BEARD und E. ATKINS: *Information consensus in multivehicle cooperative control*. IEEE Control Systems Magazine, 27(2):71–82, 2007.
- [25] SARLETTE, A., C. BASTIN, M. DIMMLER, B. SEDGHI, T. ERM, B. BAUVIR und R. SEPULCHRE: *Integral control from distributed sensing: An Extremely Large Telescope case study*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2010. eingereicht.
- [26] SCARDOVI, L. und R. SEPULCHRE: *Synchronization in networks of identical linear systems*. Automatica, 45(11):2557–2562, 2009.
- [27] SCHERER, C., P. GAHINET und M. CHILALI: *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization*. IEEE Transactions on Automatic Control, 42(7):896–911, 1997.
- [28] SEO, J. H., H. SHIM und J. BACK: *Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: Low gain approach*. Automatica, 45(11):2659–2664, 2009.
- [29] SKELTON, R. E., T. IWASAKI und K. M. GRIGORIADIS: *A Unified Algebraic Approach to Control Design*. Taylor & Francis, 1997.
- [30] THULASIRAMAN, K. und M. N. S. SWAMY: *Graphs: Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience, 1992.
- [31] TOH, K. C., M. J. TODD und R. H. TÜTÜNCÜ: *SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite programming*. Optimization Methods & Software, 11:545–581, 1999.
- [32] TUNA, S. E.: *LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems*. [Online], 2008. arXiv:0801.3390v1.
- [33] TUNA, S. E.: *Conditions for synchronizability in arrays of coupled linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 54(10):2416–2420, 2009.
- [34] VOIGT, C. und J. ADAMY: *Formelsammlung der Matrizenrechnung*. Oldenbourg Verlag, 2007.
- [35] WANG, J., D. CHENG und X. HU: *Consensus of multi-agent linear dynamic systems*. Asian Journal of Control, 10(2):144–155, 2008.
- [36] WANG, J., Z. LIU und X. HU: *Consensus of high order linear multi-agent systems using output error feedback*. In: *48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, S. 3685–3690, 2009.
- [37] WIELAND, P.: *From Static to Dynamic Couplings in Consensus and Synchronization among Identical and Non-Identical Systems*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 2010.

- [38] WIELAND, P., J.-S. KIM, H. SCHEU und F. ALLGÖWER: *On consensus in multi-agent systems with linear high-order agents*. In: *17th Triennial IFAC World Congress*, S. 1541–1546, 2008.
- [39] WIELAND, P., R. SEPULCHRE und F. ALLGÖWER: *An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization*. *Automatica*, 47(5):1068–1074, Mai 2011.

Manuskripteingang: 20. Mai 2011



Dipl.-Ing. Kim D. Listmann ist Stipendiat und wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik der TU Darmstadt und Mitglied im DFG Graduiertenkolleg 1362 „Cooperative Adaptive and Responsive Monitoring in Mixed Mode Environments“. Hauptarbeitsgebiete: Kooperative Regelungen, vernetzte dynamische Systeme, nichtlineare Systeme
Adresse: TU Darmstadt, FB 18, FG Regelungstheorie & Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: kdl@ieee.org



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektro- und Informationstechnik der TU Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren für Systeme mit Beschränkungen, Computational Intelligence, autonome mobile Roboter.
Adresse: TU Darmstadt, FB 18, FG Regelungstheorie & Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, 64283 Darmstadt, E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de



Prof. Luca Scardovi, Ph.D. ist Juniorprofessor am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der TU München. Hauptarbeitsgebiete: Regelung vernetzter dynamischer Systeme, nichtlineare Systeme, Neuronale Netze
Adresse: TU München, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Theresienstrasse 90, 80290 München, E-Mail: scardovi@tum.de

Verfügbar unter
lediglich die vom Gesetz vorgesehenen Nutzungsrechte gemäß UrhG



Mathematik „spielend“ lernen!



Manfred Dobrowolski
Mathematische Exkursionen
Gödel, Escher und andere Spiele

2010 | 275 S. | Broschur | € 29,80
ISBN 978-3-486-58909-2

Anhand spannender Beispiele aus dem Alltag vermittelt dieses Buch die für das Studium der Mathematik erforderlichen Fertigkeiten und bietet einen Überblick über Teilgebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen.

Ausgehend von nur geringen Vorkenntnissen behandelt der Autor verschiedene Themen der modernen Mathematik, die einen hohen ästhetischen und intellektuellen Reiz besitzen oder das heutige Weltbild mitprägen. Dazu zählt beispielsweise das Werk von Maurits Cornelis Escher oder die mathematische Theorie der Spiele in all ihren Erscheinungsformen wie strategischen Spielen und Glücksspielen. Die das Weltbild mitprägende Mathematik ist vertreten durch die Untersuchung unendlicher Mengen, Arbeiten über Logik und Berechenbarkeit sowie die Analyse von Chaos und Fraktalen. Ziel ist dabei stets die Aufdeckung der zugrunde liegenden mathematischen Mechanismen. In jedem Kapitel gibt es Übungsaufgaben, die am Ende des Buches vollständig gelöst werden.

Das Buch richtet sich an Lehrer und Studierende der Mathematik beziehungsweise der Informatik sowie an alle, die sich für die Mathematik des 20. Jahrhunderts interessieren.

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:
Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333, verkauf@oldenbourg.de, www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de