The Journal of Symbolic Logic
Volume 56, Number 2, June 1991

ANNEAUX p-ADIQUEMENT CLOS ET ANNEAUX DE FONCTIONS DÉFINISSABLES

LUC BÉLAIR[1]

§0. Introduction. Nous considérons des théories d'anneaux locaux reliées aux corps p-adiques, p un nombre premier. Dans le §1 nous établissons les axiomatisations données dans [B1], ainsi qu'une autre axiomatisation des anneaux apparaissant dans [R1]. Il s'agit d'anneaux locaux hensëliens dont le corps résiduel est élémentairement équivalent à une extension finie d'un corps p-adique. Nous les appelons anneaux locaux p-adiquement clos. Dans le contexte de [R1] et [B1] ils apparaissent comme fibres du faisceau structural (aussi appelé faisceau de Nash dans [BS]) accompagnant les spectres p-adiques. L'intérêt de nos axiomatisations provient de la simplicité des axiomes qui rendent compte des propriétés hensëliennes. Dans le §2 nous donnons une axiomatisation d'une théorie d'anneaux locaux qui apparaît naturellement dans le contexte de la théorie des modèles des corps valués, et se trouve être une complétion d'une théorie du §1. Nous appelons ces anneaux, anneaux intègres p-adiquement clos.

Dans le §3 nous utilisons §2 pour montrer que les anneaux intègres p-adiquement clos apparaissent aussi comme anneaux quotients d'anneaux de fonctions continues définissables sur les courbes affines p-adiques. Nous représentons alors un idéal premier comme le noyau d'un morphisme d'évaluation en un point non-standard de la courbe. Le spectre p-adique fournit un outil commode qui permet de décrire la situation de façon concise. Quelques-uns de nos arguments (par exemple dans les lemmes 3.9 et 3.11) s'apparentent à certains raisonnements utilisés dans le contexte de "décomposition cylindrique" réelle (voir [V1]) ou p-adique (voir [SV]). Des questions similaires sont traitées dans [Pi].

Les théories d'anneaux que nous présentons possèdent des analogues réels. Plus précisément, les anneaux locaux p-adiquement clos correspondent aux "anneaux

Received December 12, 1988; revised March 1, 1990.

[1] Les résultats des §§2 et 3 ont été obtenus lorsque l'auteur était boursier du CRSNG (Canada) dans l'Équipe de Logique Mathématique (CNRS) de l'Université Paris-VII. Je tiens à remercier l'Équipe pour son hospitalité.

L'auteur remercie le Lecteur du JSL pour ses commentaires et sa lecture attentive de cet article.

0022-4812/91/5602-0010/$02.50

locaux séparablement réels clos" de Kock (voir [JR]), et les anneaux intègres p-adiquement clos correspondent aux anneaux réels clos de Cherlin et Dickmann (voir [CD]).

Nous précisons maintenant la notation, et faisons quelques rappels. Dans cet article, anneau sera synonyme d'anneau unitaire commutatif, et définissable sera synonyme de définissable avec paramètres dans le langage des anneaux. Un anneau est dit local s'il ne possède qu'un seul idéal maximal, qui coïncide alors avec l'ensemble des éléments non inversibles. Si A est un anneau local, m_A désigne son idéal maximal, k_A son corps résiduel, i.e. A/m_A, et $^-$ l'application canonique de A sur k_A. On utilise les prédicats auxiliaires $R_n(x)$, $n \geq 1$, avec l'interprétation $R_n(x) \leftrightarrow \exists y\,(xy^n = 1)$. Un anneau local A est dit hensélien si pour tout polynôme $f \in A[x]$, toute racine résiduelle (i.e. dans k_A) simple de f se relève en une racine de f dans A (forcément unique). À un anneau A on peut associer son spectre premier, noté Spec A: c'est l'espace topologique formé des idéaux premiers de A et dont une base est donnée par les ensembles de la forme $D(a) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\colon a \notin \mathfrak{p}\}$, $a \in A$. Spec A est un espace compact (i.e. il possède la propriété de sous-recouvrement fini) muni d'une base d'ouverts compacts close par intersection finie, à savoir les $D(a)$, et tel que tout fermé irréductible est l'adhérence d'un seul et unique point. Un espace topologique ayant ces propriétés est dit spectral. Hochster [Ho, théorème 6] a montré que ce sont exactement les espaces homéomorphes au spectre premier d'un anneau. Soit I un idéal de A, on pose $\operatorname{nrad} I = \{b \in A\colon \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^n \in I\}$.

Soit K un corps, on note $K^{\cdot}$ son groupe multiplicatif et $K^{\cdot n}$ ou P_n le sous-groupe multiplicatif des puissances n-ièmes, $n \in \mathbb{N}$. On écrit aussi $P_n^{\cdot}(x)$ pour $x \in P_n^{\cdot}$. On note $\mathbf{x}$ le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$. Une variété affine V dans l'espace affine K^n est un sous-ensemble algébrique irréductible; l'idéal de V, $I(V)$, est l'idéal formé des polynômes $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ qui s'annulent sur V, et l'anneau $K[V] = K[X]/I(V)$ est appelé l'anneau des coordonnées de V. On dit que V est une courbe si le degré de transcendance de $K[V]$ sur K est 1. Si L est une extension de K, on pose $V(L) = \{\mathbf{x} \in L^n\colon f(\mathbf{x}) = 0, \text{ pour tout } f \in I(V)\}$. Si $X \subseteq K^n$ et f est une fonction de X dans K, on pose $Z(f) = \{\mathbf{x} \in X\colon f(\mathbf{x}) = 0\}$.

Soit p un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques muni de la valuation p-adique v_p. On note val K le groupe de valuation d'un corps valué (K, v) (pour les corps valués voir [Ri]). La valuation v est aussi déterminée par la relation $D(x, y) \leftrightarrow v(x) \leq v(y)$, appelée relation de divisibilité de v. Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et $\gamma \in \operatorname{val} \mathbb{Q}_p$, on pose $B(a, \gamma) = \{x \in \mathbb{Q}_p\colon v_p(x - a) \geq \gamma\}$. Soit $S \subseteq \mathbb{Q}_p^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors adh S désigne l'adhérence de S pour la topologie p-adique. Si S est définissable, alors $\mathscr{C}(S)$ désigne l'anneau des fonctions $S \to \mathbb{Q}_p$ continues (pour la topologie p-adique) et définissables. De la façon évidente on prolonge cette notation à toute extension élémentaire de $\mathbb{Q}_p$. Pour plus de détails sur la théorie élémentaire de $\mathbb{Q}_p$, $\operatorname{Th}(\mathbb{Q}_p)$, nous renvoyons à l'exposé de Macintyre [Ma]. Un corps p-adiquement clos est un corps élémentairement équivalent à $\mathbb{Q}_p$. Pour $n \geq 2$, soit $P_n(x)$ un prédicat unaire interprété comme $P_n(x) \leftrightarrow \exists y(y^n = x)$. Macintyre a montré que $\operatorname{Th}(\mathbb{Q}_p)$ élimine les quantificateurs dans le langage des anneaux muni des prédicats P_n. Pour $n \geq 2$, soit $S_n = \{r \in \mathbb{N}\colon 0 \leq r < n\}$, $\sigma(n) = 2v_p(n)$, $\Lambda_n = \{\lambda \in \mathbb{N}\colon 1 \leq \lambda < p^{\sigma(n)+1},\ (\lambda, p) = 1\}$, $\Delta_n = \{e \in \mathbb{N}\colon e = \lambda p^r, \lambda \in \Lambda_n, r \in S_n\}$, et $\Delta = \{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\colon e_n \in \Delta_n, \text{ et } (e_n) \in \varprojlim \mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p^{\cdot n}\}$. Rappelons que pour $n \geq 2$, $\mathbb{Q}_p \models \bigvee_{e \in \Delta_n} P_n(ex)$.

La théorie des modèles des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, comme corps valués, a été étudiée par Prestel et Roquette [PR]. Pour $d \in \mathbb{N}$, la théorie élémentaire des extensions finies de degré d est axiomatisée par la théorie $\mathrm{C}p\mathrm{C}_d$ des corps p-adiquement clos de rang d. Un corps p-valué est un corps valué de caractéristique 0 dont le corps des restes est de caractéristique p, et dont l'anneau de valuation modulo (p) est de dimension linéaire d sur le corps premier $\mathbb{F}_p$. Un corps p-adiquement clos de rang d est un corps p-valué de rang d hensélien, valué dans un $\mathbb{Z}$-groupe. Fixons une extension finie $K/\mathbb{Q}_p$ de degré d. La théorie élémentaire de (K, v_p) est axiomatisée par $\mathrm{C}p\mathrm{C}_d + \exists y(\chi(y) = 0)$, où $\chi \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible qui engendre l'extension $K/\mathbb{Q}_p$; $\mathrm{Th}(K)$ fixe un degré de ramification absolue e et un degré résiduel absolu f, et $d = ef$. Soit ε le plus petit entier plus grand que e et premier avec p, alors la structure valuée de (K, v_p) est définissable algébriquement: $v_p(x) \leq v_p(y) \leftrightarrow \exists z(x^\varepsilon + py^\varepsilon = z^\varepsilon)$.

Le spectre p-adique a été introduit par E. Robinson [R1] motivé par le spectre réel de Coste et Roy [CR]. Cette construction a été généralisée aux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ par Bröcker et Schinke [BS], et indépendamment dans [B1]. Rappelons-la brièvement (voir aussi [B2]). Soit A un anneau et définissons la relation $\sim$ sur les homomorphismes $A \to K$, où $K \models \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$. Soit $f_i\colon A \to K_i$, $i = 1, 2$, où $K_i \models \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$, alors $f_1 \sim f_2$ ssi il existe $K_3 \models \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ et des homomorphismes $g_i\colon K_i \to K_3$ tels que $g_1 f_1 = g_2 f_2$. Puisque $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ est modèle-complète, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Le spectre p-adique de A, noté $\mathrm{Spec}_p A$, est l'espace topologique formé des classes d'équivalence de $\sim$, et dont la topologie est engendrée par la base

$$\{D_{\mathbf{n}}(\mathbf{a})\colon n_i \in \mathbb{N}, a_i \in A, 1 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N}\}, \quad \text{où } D_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = \{A \to K/{\sim}\colon K \models \textstyle\bigwedge P^{\cdot}_{n_i}(a_i)\}.$$

Le théorème d'élimination de Macintyre assure que les $D_{\mathbf{n}}(\mathbf{a})$ sont bien définis. On vérifie qu'ils sont compacts et que $\mathrm{Spec}_p A$ est un espace spectral. Chaque formule $\varphi(\mathbf{a})$ du langage des anneaux à paramètres dans A ($L(A)$) induit un sous-ensemble de $\mathrm{Spec}_p A$ défini par $[\varphi] = \{A \to K/{\sim}\colon K \models \varphi(\mathbf{a})\}$. Soit $\Delta^+(A)$ le diagramme positif de A (les énoncés atomiques de $L(A)$ vrais dans A), alors $\mathrm{Spec}_p A$ s'identifie avec l'ensemble des complétions de la théorie $\Delta^+(A) + \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ muni de la topologie engendrée par les formules $\bigwedge P^{\cdot}_{n_i}(a_i)$. Cette topologie est moins fine que celle engendrée par toutes les formules $\varphi(\mathbf{a})$, qui donne un espace de Stone. Le reste de la notation est standard: im g désigne l'image de la fonction g, etc.

§1. Anneaux locaux p-adiquement clos. Dans [R1], E. Robinson donne une axiomatisation dans la logique cohérente (voir [Re, p. 165]) de la classe suivante d'anneaux locaux.

DÉFINITION 1.1. On appelle *anneau local p-adiquement clos* un anneau local hensélien dont le corps résiduel est un corps p-adiquement clos.

Les corps p-adiquement clos sont, trivialement, des anneaux locaux p-adiquement clos. Outre le contexte du spectre p-adique cité dans l'introduction, on peut aussi donner comme exemples: l'anneau des séries formelles $\mathbb{Q}_p[[T]]$, l'anneau des germes de fonctions p-adiques analytiques en un point, l'anneau des germes de fonctions p-adiques C^k en un point, $k \in \mathbb{N}$ fixé. Notons que ce dernier exemple n'est pas un anneau intègre.

Fixons une extension finie $K/\mathbb{Q}_p$ de degré d, avec $d = ef$ dans la notation de §0, et soit $\chi(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme irréductible qui engendre cette extension. Dans le but de prolonger les résultats de E. Robinson (ibid.) sur le spectre p-adique, nous introduisions dans [B1] la généralisation suivante de la définition 1.1.

DÉFINITION 1.2. On appelle *anneau local p-adiquement clos de type* χ un anneau local hensélien dont le corps résiduel est un corps p-adiquement clos de rang d où le polynôme χ a un zéro.

Nous donnons d'abord une nouvelle axiomatisation des anneaux locaux p-adiquement clos, que nous généralisons ensuite au contexte de la définition 1.2 (tout cela aussi dans la logique cohérente). Comme il est maintenant bien établi, nous obtenons notre axiomatisation à partir d'une axiomatisation adéquate du corps résiduel, en considérant l'idéal maximal comme un voisinage infinitésimal de 0.

DÉFINITION 1.3. Soit CpC la théorie suivante:

(i) Axiomes de corps;

(ii.1) $D(x,y) \leftrightarrow R_1(x) \wedge R_\varepsilon(x^\varepsilon + py^\varepsilon)$, $\varepsilon = 3$, si $p = 2$, $\varepsilon = 2$, sinon;

(ii.2) $U(x) \leftrightarrow D(1,x) \wedge D(x,1)$;

(ii.3) $R_1(x) \to D(x,y) \vee D(y,x)$;

(ii.4) $D(x,y) \wedge D(y,z) \to D(x,z)$;

(ii.5) $D(x,y) \wedge D(x',y') \to D(xx',yy')$;

(ii.6) $D(x,y) \wedge D(x,y') \to D(x, y + y')$;

(iii.1) $D(p,1) \to \bot$;

(iii.2) $D(1,x) \to \bigvee\{D(p, x - i)\colon 0 \le i < p\}$;

(iii.3) $D(x,1) \vee D(p,x)$;

(iii.4_n) $R_1(x) \to \bigvee\{R_n(\lambda p^r x)\colon r \in S_n,\ \lambda \in \Lambda_n\}$;

(iv$_n$) $\bigwedge\{U(x_1), D(p,x_j)\colon 1 < j \le n\} \to \exists y(y^n + x_1 y^{n-1} + \cdots + x_n = 0) \wedge U(y)$.

LEMME 1.4. *La théorie* CpC *constitue une axiomatisation des corps p-adiquement clos.*

DÉMONSTRATION. Le prédicat $D(x,y)$ définit la relation de divisibilité correspondant à la valuation p-adique dans les corps p-adiquement clos. L'axiome (iv$_n$) dit que cette valuation est hensélienne (voir [Ri, p. 185, théorème 4]) et (iii.4_n) assure que le groupe de valuation est un $\mathbb{Z}$-groupe. □

DÉFINITION 1.5. Toujours avec la même interprétation des R_n, soit ALpC la théorie d'anneau obtenue de CpC en remplaçant les axiomes de corps par ceux d'anneau local, i.e.

(i.0) Axiomes d'anneau;

(i.1) $(0 = 1) \to \bot$;

(i.2) $R_1(x + y) \to R_1(x) \vee R_1(y)$;

et en ajoutant

(i.3) $R_n(x) \to R_1(x - y) \vee R_n(y)$.

Il est commode de noter $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ les hypothèses de (iv$_n$).

PROPOSITION 1.6. *La théorie* ALpC *constitue une axiomatisation des anneaux locaux p-adiquement clos.*

DÉMONSTRATION. Soit A un anneau local. Notons d'abord que si A satisfait (i.3) alors

$$(*) \qquad A \models R_n(x) \quad \text{ssi} \quad k_A \models R_n(\bar{x}).$$

De même, $(*)$ est vérifiée si A est hensélien et k_A de caractéristique zéro. On procède alors comme dans la proposition 1.4 de [R1]. Par exemple, supposons que A soit un anneau local p-adiquement clos. Les axiomes (iii) sont des séquents $\varphi \to \psi$: par $(*)$ si $A \models \varphi$ alors $k_A \models \varphi$, et par le lemme 1.4 ceci donne $k_A \models \psi$ dont on tire $A \models \psi$ en utilisant $(*)$ de nouveau. Le seul point délicat ici est de montrer que si $A \models \mathrm{AL}p\mathrm{C}$ alors A est hensélien. Il suffit de montrer que tout polynôme $f(t) = t^n + t^{n-1} + ba_2t^{n-2} + \cdots + ba_n$, où $b \in m_A$, $a_j \in A$, possède une racine inversible (voir [V2, (2.10)]). Or $f(t) \equiv t^n + t^{n-1}$ modulo m_A, et donc $k_A \models \delta(\overline{1}, \overline{ba_2}, \ldots, \overline{ba_n})$. Par $(*)$ on a $A \models \delta(1, ba_2, \ldots, ba_n)$ et f possède une racine x telle que $U(x)$. □

Il est commode d'introduire la notation suivante. Pour $n \geq 1, m, k(1), \ldots, k(m)$ des entiers non négatifs posons $S_n^* = S_n \cup \{*\}$, $x^{\mathbf{k}} = (x^{k(1)}, \ldots, x^{k(m)})$, $x^* = 0$, $\beta(n) = 2dv_p(n)$, $g_n(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=0}^{\beta(n)} x_i y^i$, et soit $\mu = p^f - 1$. Rappelons notre convention pour ε, c'est le plus petit entier premier avec p et plus grand que e.

DÉFINITION 1.7. Soit $\mathrm{C}p\mathrm{C}_\chi$ la théorie suivante:

(0) $R_1(k)$, $k = 2, 3, \ldots$;

$(\mathrm{i})_\chi$ à $(\mathrm{iii.1})_\chi$ les mêmes axiomes que (i) à (iii.1);

$(\mathrm{iii.2})_\chi$ $U(x) \wedge D(x^\mu - 1, 1) \to \bot$;

$(\mathrm{iii.3})_\chi$ $D(x, 1) \vee D(p, x^e)$;

$(\mathrm{iii.4}_n)_\chi$ $R_1(x) \wedge D(y^e, p) \wedge D(p, y^e) \wedge (z^\mu = 1)$
$$\to \left[\bigvee\{z^i = 1 : 1 < i < p^f - 1\} \vee \bigvee\{R_n(g_n(z^{\mathbf{k}}, y)y^r x) \wedge U(g_n(z^{\mathbf{k}}, y)) : r \in S_n, \mathbf{k} \in (S_\mu^*)^{\beta(n)+1}\}\right];$$

$(\mathrm{iv}_n)_\chi$ $\bigwedge\{U(x_1) \wedge D(p, x_j^e) : 1 < j \leq n\}$
$$\to \exists y(y^n + x_1 y^{n-1} + \cdots + x_n = 0) \wedge U(y);$$

(v) $\exists y(\chi(y) = 0)$.

PROPOSITION 1.8. *La théorie* $\mathrm{C}p\mathrm{C}_\chi$ *constitue une axiomatisation de* $\mathrm{Th}(K)$.

DÉMONSTRATION. Tout modèle de $\mathrm{C}p\mathrm{C}_d$ + (v) vérifie $\mathrm{C}p\mathrm{C}_\chi$. D'autre part si $M \models \mathrm{C}p\mathrm{C}_\chi$, alors (0)–$(\mathrm{iii.3})_\chi$ disent que M est p-valué avec indice de ramification absolue $e_M \leq e$ et degré résiduel absolu $f_M \leq f$. Soit v la valuation de M, on a alors $v(x) > 0$ ssi $v(x^e) \geq v(p)$, et $(\mathrm{iv}_n)_\chi$ implique que M est hensélien. Par (v) on a $e_M \geq e$ et $f_M \geq f$. Enfin on peut trouver un élément premier y et une racine primitive $(p^f - 1)$-ième de 1, z, et $(\mathrm{iii.4}_n)_\chi$ assure que M est valué dans un $\mathbb{Z}$-groupe. □

REMARQUE. Le Lecteur du JSL nous a indiqué que (0) découle des autres axiomes de $\mathrm{C}p\mathrm{C}_\chi$. Les mêmes arguments montrent aussi que $\mathrm{AI}p\mathrm{C} - (0) \vdash R_1(p) \wedge q \neq 0$, q premier et $q \neq p$ (cf. §2).

DÉFINITION 1.9. Soit $\mathrm{AL}p\mathrm{C}_\chi$ la théorie d'anneau obtenue de $\mathrm{C}p\mathrm{C}_\chi$ de la même façon que $\mathrm{AL}p\mathrm{C}$ à partir de $\mathrm{C}p\mathrm{C}$.

PROPOSITION 1.10. *La théorie* $\mathrm{AL}p\mathrm{C}_\chi$ *constitue une axiomatisation des anneaux locaux p-adiquement clos de type χ.*

DÉMONSTRATION. Compte tenu de la proposition précédente on peut procéder comme pour la proposition 1.6. □

Il est clair qu'on peut considérer $\mathrm{AL}p\mathrm{C}$ comme le cas particulier de $\mathrm{AL}p\mathrm{C}_\chi$ où $d = 1$. Dans la même veine, notons aussi $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ les hypothèses de l'axiome $(\mathrm{iv}_n)_\chi$. L'intérêt de l'axiomatisation $\mathrm{AL}p\mathrm{C}_\chi$ réside dans la simplicité de $(\mathrm{i.3})_\chi$ et $(\mathrm{iv}_n)_\chi$ à rendre compte des propriétés henséliennes à la fois de l'anneau lui-même, et de la valuation p-adique du corps résiduel. De façon plus précise, on exploite dans

[B1, lemme 5] le lemme suivant, qu'on démontre en utilisant les propriétés henséliennes de A et de la valuation p-adique de k_A.

LEMME 1.11. *Soit* $A \models \mathrm{AL}p\mathrm{C}_\chi$, $a_1, \dots, a_n \in A$ *tels que* $A \models \delta(\mathbf{a})$. *Alors il existe un seul et unique* $x \in A$ *tel que* $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ *et* $A \models U(x)$.

§2. Anneaux intègres p-adiquement clos.

DÉFINITION 2.1. Soit AIpC la théorie d'anneau obtenue à partir de la théorie ALpC en ajoutant l'axiome (0) et en remplaçant respectivement les axiomes (i.2) et (iii.4_n) par (i.2′) et (iii.$4'_n$):

(0) $R_1(k)$, $k = 2, 3, \dots$;

(i.2′) $(xy = 0) \to (x = 0) \vee (y = 0)$, $\exists z\ ((x = zy) \vee (y = zx))$, et $\exists z\ \neg R_1(z) \wedge \neg(z = 0)$;

(iii.$4'_n$) $\bigvee_{e \in \Delta_n} \exists y\, (y^n = ex)$.

L'axiome (i.2′) dit que l'anneau est un anneau de valuation non trivial (i.e. pas un corps). Rappelons que tout anneau de valuation est local. On vérifie facilement que l'anneau de séries formelles généralisées $\mathbf{Q}_p[[T^{\mathbf{Q}}]]$ est un modèle de cette théorie. Soit C une courbe affine p-adique, nous allons montrer en §3 que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non maximal de $\mathscr{C}(C(\mathbf{Q}_p))$, alors l'anneau quotient $\mathscr{C}(C(\mathbf{Q}_p))/\mathfrak{p}$ est un modèle de AIpC. Notons que si on admet les anneaux de valuations triviaux (i.e. les corps) comme modèle de AIpC, on obtient aussi les corps p-adiquement clos. Nous appelons les modèles de AIpC, *anneaux intègres p-adiquement clos*. La théorie AIpC constitue une axiomatisation de $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p[[T^{\mathbf{Q}}]])$.

PROPOSITION 2.2. *La théorie* AIpC *axiomatise les anneaux de valuation henséliens non-triviaux dont le corps résiduel est p-adiquement clos et le groupe de valuation divisible.*

DÉMONSTRATION. Si $A \models$ AIpC, alors compte tenu de §1 il suffit de montrer que le groupe de valuation de A est divisible, ce qui découle de (iii.$4'_n$) et du fait que A est une $\mathbf{Q}$-algèbre. D'autre part, si A est un anneau de valuation hensélien dont le corps résiduel est p-adiquement clos et le groupe de valuation est divisible, alors par §1 il suffit de montrer que $A \models$ (iii.$4'_n$). Soit donc $a \in A$. Le groupe de valuation de A étant divisible, (iii.4_n) entraîne que le polynôme $X^n - ae$ possède un zéro dans le corps des fractions de A pour un $e \in \Delta_n$. Comme A est intégralement clos on a le résultat voulu. □

La théorie d'anneau de valuation AIpC fournit les meilleures conditions d'application de différents principes de transfert du type Ax-Kochen-Ershov. La caractéristique est toujours nulle, la théorie des corps p-adiquement clos et celle des groupes abéliens ordonnés divisibles sont complètes, décidables, modèles-complètes et admettent l'élimination des quantificateurs, l'une dans une extension par définition du langage des corps (théorème de Macintyre) et l'autre dans le pure langage des groupes ordonnés.

COROLLAIRE 2.3. (1) *La thé*orie AIpC *est complète et décidable.*

(2) *La théorie* AIpC *élimine les quantificateurs* (*de façon primitive récursive*) *dans le langage des anneaux auquel on ajoute les prédicats* $P_n(x)$, $n \geq 2$, *où* AIpC $\models P_n(x) \leftrightarrow \exists y\, (y^n = x)$.

(3) *La théorie* AIpC *est modèle-complète dans le langage des anneaux auquel on ajoute le prédicat* $x \mid y$, *où* AIpC $\models x \mid y \leftrightarrow \exists z\, (xz = y)$.

DÉMONSTRATION. En considérant le couple formé par un anneau de valuation et son corps des fractions on peut adapter sans difficulté les théorèmes suivants. Pour (1) c'est le principe de Ax-Kochen-Ershov pour la complétude, e.g. voir le théorème A de [CD]. Pour (2) on peut utiliser le théorème 5 de [CD] ou le corollaire 2.21 de [De], et pour l'élimination primitive récursive le théorème 4.12 de [We]. Pour (3), notons qu'une inclusion d'anneaux de valuation $A_1 \hookrightarrow A_2$ qui respecte le prédicat $|$ induit une extension de corps valués au niveau de leurs corps des fractions, de sorte qu'il s'agit du principe de Ax-Kochen-Ershov pour la modèle-complétude, e.g. voir le théorème B de [CD]. $\square$

Il s'ensuit que le corps des fractions d'un modèle de AIpC est toujours un corps p-adiquement clos, puisqu'il en est ainsi pour $\mathbb{Q}_p[[T^{\mathbb{Q}}]]$. On peut toutefois démontrer directement ce fait en utilisant le même genre d'argument que dans la dernière partie de la démonstration de la proposition 2.2. Nous esquissons cette preuve. Notons $Q(A)$ le corps des fractions d'un anneau intègre A.

PROPOSITION 2.4. *Si* $A \models$ AIpC, *alors* $Q(A) \models$ CpC.

DÉMONSTRATION. Soit les prédicats $P_n(x)$, $\Upsilon(x, y)$ interprétés comme suit:

$$A \models P_n(x) \leftrightarrow \exists y\, (y^n = x);$$
$$A \models \Upsilon(x, y) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge P_\varepsilon(x^\varepsilon + py^\varepsilon).$$

Notons que comme A est intégralement clos on a

$$A \models P_n(xz^n) \rightarrow P_n(x). \tag{1}$$

On vérifie d'abord que $\Upsilon(x, y)$ définit une valuation p-adique sur A, qui se prolonge de facon unique à $Q(A)$. Par exemple montrons que $A \models x \neq 0 \rightarrow \Upsilon(x, y) \vee \Upsilon(y, x)$. Soit $x, y \in A$, $x \neq 0$. Comme A est un anneau de valuation on peut supposer $x = zy$, pour un $z \in A$. Par (iii.4′), on a $P_\varepsilon(\rho_1(z^\varepsilon y^\varepsilon + py^\varepsilon))$ et $P_\varepsilon(\rho_2(y^\varepsilon + pz^\varepsilon y^\varepsilon))$, pour certains $\rho_1, \rho_2 \in \Delta_\varepsilon$; par (1) on a $P_\varepsilon(\rho_1(z^\varepsilon + p))$ et $P_\varepsilon(\rho_2(1 + pz^\varepsilon))$ (notons que $R_1(z^\varepsilon + p)$ et $R_1(1 + pz^\varepsilon)$: c'est immédiat si $\neg R_1(z)$, sinon on peut utiliser la valuation p-adique de k_A). Par ailleurs, si $R_1(z)$ alors, par (ii.3), on a $R_\varepsilon(z^\varepsilon + p)$ ou $R_\varepsilon(1 + pz^\varepsilon)$, et ainsi $P_\varepsilon(y^\varepsilon z^\varepsilon + py^\varepsilon)$ ou $P_\varepsilon(y^\varepsilon + pz^\varepsilon y^\varepsilon)$, i.e. $\Upsilon(x, y)$ ou $\Upsilon(y, x)$. Enfin si $\neg R_1(z)$, alors en utilisant (i.3) on obtient $R_\varepsilon(\rho_2)$, d'où $R_\varepsilon(1 + pz^\varepsilon)$, et donc $P_\varepsilon(y^\varepsilon + pz^\varepsilon y^\varepsilon)$, i.e. $\Upsilon(y, x)$.

À ce stade-ci, $\Upsilon(x, y)$ détermine sur $Q(A)$ une valuation p-adique, et (iii.4$'_n$) assure que le groupe de valuation est un $\mathbb{Z}$-groupe. Il reste à vérifier que cette valuation est hensélienne. Il suffit de montrer

$$\begin{aligned} A \models \Upsilon(a_1, b_1) \wedge \Upsilon(b_1, a_1) \wedge \bigwedge_{j>1} \Upsilon(pb_j, a_j) \\ \rightarrow \exists y\, (\hat{b}_0 y^n + \hat{b}_1 a_1 y^{n-1} + \cdots + \hat{b}_n a_n = 0 \wedge \Upsilon(1, y) \wedge \Upsilon(y, 1)), \end{aligned} \tag{2}$$

où $a_i, b_j \in A$, $b_0 = 1$, $\hat{b}_j = b_0 \cdots b_{j-1} b_{j+1} \cdots b_n$.

Si $R_1(b_j)$, pour tout j, alors c'est fini par l'axiome (iv$_n$). Sinon supposons b_i non inversible, et soit $F(X) = \sum_{j=0}^n \hat{b}_j a_j X^{n-j}$, où $a_0 = 1$. Si $b_i = u_i a_i$, $b_i \neq 0$, alors en raisonnant comme ci-dessus on obtient $R_\varepsilon(p^\varepsilon u_i^\varepsilon + p)$ et $R_1(u_i)$, si $i \neq 1$, et $R_\varepsilon(u_1^\varepsilon + p)$, $R_\varepsilon(1 + pu_1^\varepsilon)$ et $R_1(u_1)$, si $i = 1$. Posons $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, si $j \neq i$, et $b'_i = u_i$, $a'_i = 1$, et $F_1(X) = \sum_{j=0}^n \hat{b}'_j a'_j X^{n-j}$. Alors $F(X) = a_i F_1(X)$ et les coefficients de $F_1(X)$ vérifient aussi les hypothèses de (2), cependant $F_1(X)$ possède un "b_j" inversible en plus, à savoir b'_i. Par notre première remarque, on peut raisonner par récurrence et trouver

$y \in A$ tel que $F_1(y) = 0$, $\Upsilon(y, 1)$, $\Upsilon(1, y)$ et a fortiori $F(y) = 0$. Par ce qui précède et le fait que A est un anneau de valuation, on peut donc supposer $a_j = u_j b_j$ pour tout j. Soit $F_1(X) = X^n + u_1 X^{n-1} + \cdots + u_n$, alors $F(X) = \hat{b}_0 F_1(X)$ et comme ci-dessus les u_j vérifient (iv$_n$) et on conclut facilement. □

Ainsi les modèles de AIpC sont des anneaux de valuation de corps p-adiquement clos. On peut les caractériser en ces termes.

PROPOSITION 2.5. *Les modèles de* AIpC *sont les anneaux de valuation des corps p-adiquement clos induits par les sous-groupes convexes du groupe de valuation de la valuation p-adique.*

DÉMONSTRATION. Soit $K \models$ CpC, v sa valuation p-adique, H un sous-groupe convexe propre de val K, A l'anneau de valuation de K induit par H, i.e. $(*)$ $A = \{x \in K: \exists \gamma \in H, v(x) \geq \gamma\}$, et U le groupe multiplicatif des unités de A. On a $v(U) = H$, et donc $A = \{x \in K: \exists u \in U, v(x) \geq v(u)\}$. La valuation v de K induit une valuation $w: k_A \twoheadrightarrow H$ dont le corps des restes est canoniquement isomorphe à celui de (K, v). Comme H est convexe il contient $\mathbb{Z}v(p)$ et il est pur dans val K; donc H est un $\mathbb{Z}$-groupe et w une valuation p-adique. D'autre part, la théorie des valuations assure que (k_A, w) est aussi hensélien, de même que A. Enfin, (iii.4$'_n$) découle de $(*)$, et $A \models$ AIpC. Un exemple particulier de cette construction est le suivant. Soit $^*\mathbb{Q}_p$ une extension élémentaire propre de $\mathbb{Q}_p$ et $A = \{x \in {}^*\mathbb{Q}_p: \exists a \in \mathbb{Q}_p,\ v(x) \geq v(a)\}$ (les éléments "à distance finie"), i.e. l'anneau de valuation induit par le sous-groupe convexe $\mathbb{Z}v(p)$, donc $A \models$ AIpC. Le groupe des unités de A définit un sous-groupe convexe de val $^*\mathbb{Q}_p$ (à savoir $\mathbb{Z}v(p)$), i.e. de val $Q(A)$. De plus, A coïncide avec l'anneau de valuation induit par ce sous-groupe convexe de val $Q(A)$. Ces deux propriétés se traduisent au premier ordre dans AIpC de sorte qu'elles sont aussi vraies dans tous les modèles. □

Soulignons que AIpC constitue une complétion de ALpC. Par le principe de Ax-Kochen-Ershov, toute autre complétion en une théorie d'anneau de valuation peut être obtenue en fixant une théorie complète pour le groupe de valuation.

§3. Anneaux de fonctions continues définissables. Soit V une variété affine p-adique. Notons aussi $\mathscr{C}(V)$ l'anneau $\mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))$. Le but de ce paragraphe est de montrer que si C est une courbe affine p-adique, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier non maximal de $\mathscr{C}(C)$, alors l'anneau quotient $\mathscr{C}(C)/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre p-adiquement clos. Dickmann [D2] a établi des résultats de cette nature pour les variétés affines réelles. Il a montré que dans le cas des courbes, les anneaux quotients $\mathscr{C}(C)/\mathfrak{p}$ sont des anneaux réels clos. Notre analyse du cas p-adique s'inspire du travail de Dickmann. Nous faisons cependant usage de façon plus systématique de l'aspect logique du spectre p-adique, par rapport à la situation dans le cas réel. Nous expliquons ceci par le manque d'outil analytique pour décrire correctement les objets en présence. Notre approche s'applique aussi au cas réel.

Carral et Coste [CC, proposition 6] ont remarqué que si V est une variété affine réelle, $\mathbb{R}[V]$ son anneau de coordonnées, et $\mathscr{C}(V)$ l'anneau des fonctions $V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continues et définissables, alors le spectre réel de $\mathbb{R}[V]$ est homéomorphe à Spec$\,\mathscr{C}(V)$ par un isomorphisme naturel au niveau des treillis d'ouverts compacts. Nous allons montrer un résultat analogue.

PROPOSITION 3.1. *Soit V une variété affine p-adique. Alors il existe un homéomorphisme entre* $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[V]$ *et* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{C}(V)$, *induit par un isomorphisme naturel au niveau des treillis d'ouverts compacts. Cet isomorphisme envoie l'ouvert de base $D(f)$ de* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{C}(V)$ *sur l'ouvert* $[\varphi]$ *de* $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[V]$, *associé à la formule* $\varphi(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{x}) \neq 0)$.

Considérons le cas $V(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$, et $\mathbf{Q}_p[V] = \mathbf{Q}_p[t]$, où t est transcendant sur $\mathbf{Q}_p$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)$, et soit $\mathbf{Q}_p \prec {}^*\mathbf{Q}_p$ une extension élémentaire suffisamment saturée. Le point de $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[t]$ correspondant à $\mathfrak{p}$ peut être représenté par un homomorphisme $\alpha\colon \mathbf{Q}[t] \to {}^*\mathbf{Q}_p$ qui consiste en l'évaluation en $t^* = \alpha(t)$. On a les inclusions $\mathbf{Q}_p[t] \xhookrightarrow{i} \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p) \xhookrightarrow{j} \mathscr{C}({}^*\mathbf{Q}_p)$, le morphisme d'évaluation $\mathrm{év}(t^*)\colon \mathscr{C}({}^*\mathbf{Q}_p) \to {}^*\mathbf{Q}_p$, et $\mathrm{év}(t^*) \circ j \circ i = \alpha$. Il découle directement de la proposition 3.1 que $\mathfrak{p} = \ker \mathrm{év}(t^*) \circ j$, et on a un isomorphisme $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)/\mathfrak{p} \simeq \mathrm{im}\ \mathrm{év}(t^*) \circ j$. Nous utilisons cet isomorphisme et notre connaissance explicite des points de $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[t]$, qu'on peut identifier aux 1-types sur $\mathbf{Q}_p$, pour étudier la théorie élémentaire des anneaux $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)/\mathfrak{p}$. Le cas des courbes se ramène à celui de $\mathbf{Q}_p[t]$ à l'aide de "paramétrisations définissables". Plus précisément:

PROPOSITION 3.2. *Soit C une courbe affine p-adique. Alors pour tout idéal premier non-maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{C}(C)$, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)$ tel que $\mathscr{C}(C)/\mathfrak{p}$ est isomorphe à $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)/\mathfrak{q}$.*

Nous verrons que dans le cas des idéaux maximaux on obtient des corps p-adiquement clos, et le résultat demeure vrai. Dans le contexte réel Dickmann [D1] a mis en évidence l'analogue de la proposition suivante. Elle nous fournit la clé de la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbf{Q}_p^n$, définissable et localement fermé, soit $f \in \mathscr{C}(S)$ et $g \in \mathscr{C}(S\backslash Z(f))$. Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $x_0 \in$* $\mathrm{adh}(S\backslash Z(f))$, *il existe γ, $\delta \in$* $\mathrm{val}\,\mathbf{Q}_p$ tel que $v_p(f^N g) \geq \gamma$ *sur l'ensemble $B(x_0, \delta) \cap (S\backslash Z(f))$.*

DÉMONSTRATION. On raisonne comme dans le lemme 1 de [CC], et des arguments comme dans le théorème 2.5 de [BS] (inégalité de Łojasiewicz p-adique) permettent d'éviter les séries de Puiseux p-adiques (voir aussi [DV]). On peut trouver les détails dans [B2]. □

En termes de norme p-adique, c'est dire que $f^N g$ est localement borné sur $\mathrm{adh}(S\backslash Z(f))$.

COROLLAIRE 3.4. Soit f, $g \in \mathscr{C}(S)$, *tel que $Z(g) \subset Z(f)$, alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que g divise f^N dans $\mathscr{C}(S)$, i.e. $f \in \mathrm{nrad}(g)$.*

DÉMONSTRATION. On a alors $g^{-1} \in \mathscr{C}(S\backslash Z(f))$. Il existe N tel que $f^N g^{-1}$ est localement borné sur $\mathrm{adh}(S\backslash Z(f))$. Ainsi $f^{1+N} g^{-1}$ prolongé par 0 sur $Z(f)$ appartient à $\mathscr{C}(S)$ et $g f^{1+N} g^{-1} = f^{1+N}$. □

Voici un autre fait-clé.

PROPOSITION 3.5 [R2, théorème 1.3]. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbf{Q}_p^n$, un ouvert définissable. Alors il existe des polynômes $f_{ij} \in \mathbf{Q}_p[\mathbf{X}]$ et des entiers n_{ij} tel que $U = \bigcup_i \bigcap_j P^{\cdot}_{n_{ij}}(f_{ij}(\mathbf{x}))$.*

COROLLAIRE 3.6. *Soit i: $V(\mathbf{Q}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[V]$ le plongement canonique. Alors la correspondance $\varphi(\mathbf{x}) \mapsto [\varphi(\mathbf{x})]$, entre les sous-ensembles définissables de $V(\mathbf{Q}_p)$ et les sous-ensembles constructibles de $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[V]$, induit un isomorphisme du treillis des ouverts définissables de $V(\mathbf{Q}_p)$ sur le treillis des ouverts compacts de $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[V]$.*

La démonstration de la proposition 3.1 nous dit essentiellement que la correspondance $D(f) \mapsto \{\mathbf{x} \in V(\mathbb{Q}_p): f(\mathbf{x}) \neq 0\}$ établit un isomorphisme du treillis des ouverts compacts de $\operatorname{Spec} \mathscr{C}(V)$ sur le treillis des ouverts définissables de $V(\mathbb{Q}_p)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1. Les deux espaces $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ et $\operatorname{Spec} \mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))$ sont des espaces spectraux. Par la dualité espaces spectraux $\leftrightarrow$ treillis distributifs, les points de ces espaces s'identifient aux filtres premiers d'ouverts, et donc un isomorphisme entre les treillis d'ouverts compacts induit un homéomorphisme (voir [Jo, p. 66]). Le treillis des ouverts compacts de $\operatorname{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ peut être identifié au treillis des ouverts définissables de $V(\mathbb{Q}_p)$, notons-le $\tau(V)$. Soit $\tau(\mathscr{C})$ le treillis des ouverts compacts de $\operatorname{Spec} \mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))$.

LEMME 3.7. *Le treillis $\tau(\mathscr{C})$ coïncide avec $\{D(f): f \in \mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f, g \in \mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))$ et $\psi(x, y) = x^2 + py^2$. Puisque

$$\mathbb{Q}_p \models (\psi(x, y) = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0),$$

on vérifie aisément que $D(f) \cup D(g) = D(\psi(f, g))$ en utilisant le corollaire 3.4. □

Soit donc $\Phi: \tau(\mathscr{C}) \to \tau(V)$, l'application qui envoie $D(f)$ sur $\{\mathbf{x} \in V(\mathbb{Q}_p): f(\mathbf{x}) \neq 0\}$. La relation $D(f) = D(g)$ ssi $\operatorname{nrad}(f) = \operatorname{nrad}(g)$, assure que Φ est bien définie et, par le corollaire 3.4, que Φ est injective. On vérifie que Φ est un homomorphisme de treillis. La surjectivité découle du lemme suivant.

LEMME 3.8. *Pour tout fermé définissable $F \subset \mathbb{Q}_p^n$, il existe une fonction $\mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{Q}_p$ continue et définissable qui s'annule exactement sur F.*

DÉMONSTRATION. Notons que dans le cas réel on peut utiliser $\operatorname{dist}(x, F) = \inf\{|x - y|: y \in F\}$, mais dans notre cas on ne dispose pas de section de la valuation v_p pour définir la norme p-adique. Pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, soit $e_j \in \Delta_m$ tel que $\mathbb{Q}_p = \{0\} \mathbin{\dot\cup} e_1 P_m^{\cdot} \mathbin{\dot\cup} \cdots \mathbin{\dot\cup} e_{k(m)} P_m^{\cdot}$, où $e_1 = 1$. Par la proposition 3.5, il existe $m(i, j) \in \mathbb{N}$ et $f_{ij} \in \mathbb{Q}_p[\mathbf{X}]$ tel que

$$F = \bigcup_{i=1}^{q} \bigcap_{j=1}^{r(i)} P_{m(i,j)}(f_{ij}(\mathbf{x})).$$

Pour m fixé et pour $x \in \mathbb{Q}_p^{\cdot}$, posons $\rho_m(x) = e_i$ ssi $x \in e_i P_m^{\cdot}$. Ainsi $x \in P_m^{\cdot}$ ssi $\rho_m(x) = 1$. Notons que ρ_m est continue sur $\mathbb{Q}_p^{\cdot}$ puisque les $e_i P_m^{\cdot}$ sont ouverts. Soit $\varphi_m: \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ définie par $\varphi_m(x) = 0$, si $x = 0$, et $\varphi_m(x) = x(\rho_m(x) - 1)$, si $x \neq 0$. On vérifie aisément que φ_m est continue et que $\varphi_m(x) = 0$ ssi $x \in P_m$. Soit

$$\Psi_i(X_1, \ldots, X_{r(i)}) = X_1^{r(i)} + pX_2^{r(i)} + \cdots + p^{r(i)-1} X_{r(i)}^{r(i)}.$$

On vérifie que Ψ_i ne s'annulle qu'en $(0, \ldots, 0)$ et alors

$$\Psi_F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{r} \Psi_i(\varphi_{m(i,1)}(f_{i1}(\mathbf{x})), \ldots, \varphi_{m(i,r(i))}(f_{i,r(i)}(\mathbf{x})))$$

est la fonction cherchée. □

Pour l'instant nous étudierons les anneaux $\mathscr{C}(V)/\mathfrak{p}$ de façon générale. Soit $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_m]$ qui définissent une variété affine de $\mathbb{Q}_p^m$, et notons V cette variété. Soit $\mathbb{Q}_p[V] = \mathbb{Q}_p[x_1, \ldots, x_m]$, $\mathbb{Q}_p \prec {}^*\mathbb{Q}_p$ une extension élémentaire suffisamment saturée, et soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathscr{C}(V)$. De façon analogue à la discussion faite au début du §3, le point de $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[V]$ correspondant à $\mathfrak{p}$ peut être représenté par un homomorphisme $\alpha\colon \mathbb{Q}_p[V] \to {}^*\mathbb{Q}_p$ qui consiste en l'évaluation en un point $\mathbf{x}^* \in V({}^*\mathbb{Q}_p)$, où $\mathbf{x}^* = \alpha(\mathbf{x})$. On a l'égalite $\mathfrak{p} = \ker \text{év}(\mathbf{x}^*)$, où $\text{év}(\mathbf{x}^*)\colon \mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p)) \to {}^*\mathbb{Q}_p$ est l'évaluation en $\mathbf{x}^*$. Soit A l'image de $\text{év}(\mathbf{x}^*)$, alors A est isomorphe à $\mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))/\mathfrak{p}$, et est clairement une $\mathbb{Q}$-algèbre.

LEMME 3.9. *Soit $n \geq 2$ et $a \in A$ tel que $a \neq 0$ et $a \in {}^*\mathbb{Q}_p^{\cdot n}$. Alors il existe $b \in A$ tel que $a = b^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $a = f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbb{Q}_p = \{0\} \mathbin{\dot\cup} e_1 P_n^{\cdot} \mathbin{\dot\cup} \cdots \mathbin{\dot\cup} e_{k(n)} P_n^{\cdot}$, où $e_1 = 1$, et soit $U_i = e_i P_n^{\cdot}(f(\mathbf{x})) \cap V(\mathbb{Q}_p)$, de sorte que $V(\mathbb{Q}_p) = (Z(f) \cap V(\mathbb{Q}_p)) \mathbin{\dot\cup} U_1 \mathbin{\dot\cup} \cdots \mathbin{\dot\cup} U_{k(n)}$.

Alors, en utilisant par exemple les fonctions de Skolem explicites de [Dn], on peut définir des fonctions $\zeta_i\colon U_i \to \mathbb{Q}_p$, $i = 1, \ldots, k(n)$, continues et définissables telles que pour tout $\mathbf{x} \in U_i$, $f(\mathbf{x}) = e_i(\zeta_i(\mathbf{x}))^n$. Soit $\zeta\colon V(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ définie par $\zeta(\mathbf{x}) = 0$, si $\mathbf{x} \in Z(f) \cap V(\mathbb{Q}_p)$, et $\zeta(\mathbf{x}) = \zeta_i(\mathbf{x})$, si $\mathbf{x} \in U_i$. Alors ζ est continue. En effet, il suffit de le vérifier en $\mathbf{x} \in Z(f) \cap V(\mathbb{Q}_p)$. Soit $(\mathbf{x}_j) \in V(\mathbb{Q}_p)$ une suite qui converge vers $\mathbf{x}$. On peut supposer que $f(\mathbf{x}_j) \neq 0$ pour tout j. Par continuité on a $\lim_j f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}) = 0$. Or il existe $1 \leq i \leq k(n)$ et une sous-suite $(\mathbf{x}_{i(j)})$ tel que $\mathbf{x}_{i(j)} \in U_i$ pour tout j. Ainsi $\lim_j f(\mathbf{x}_{i(j)}) = \lim_j e_i(\zeta_i(\mathbf{x}_{i(j)}))^n = 0$, et donc $\lim_j \zeta(\mathbf{x}_{i(j)}) = \lim_j \zeta_i(\mathbf{x}_{i(j)}) = 0$. De même, de toute sous-suite de $(\mathbf{x}_j)$ on peut extraire une sous-suite $(\mathbf{x}'_j)$ tel que $\lim_j \zeta(\mathbf{x}'_j) = 0$, ce qui montre qu'on a bien $\lim_j \zeta(\mathbf{x}_j) = 0$. D'autre part on a $\mathbb{Q}_p \models \mathbf{x} \in U_i \to f(\mathbf{x}) = e_i(\zeta(\mathbf{x}))^n$. Comme $a = f(\mathbf{x}^*) \in {}^*\mathbb{Q}_p^{\cdot n}$, on a bien $a = f(\mathbf{x}^*) = (\zeta(\mathbf{x}^*))^n$, et $\zeta \in \mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))$. □

COROLLAIRE 3.10. $A \models a \neq 0 \to \bigvee_{e \in \Delta_n} \exists b\, (a = eb^n)$.

DÉMONSTRATION. C'est un énoncé vrai dans ${}^*\mathbb{Q}_p$, $e \in \mathbb{N}$, et A est une $\mathbb{Q}$-algèbre. □

LEMME 3.11. *Soit v la valuation p-adique de ${}^*\mathbb{Q}_p$, soit $a_j \in A$ tels que $v(a_1) = 0$, et $v(a_j) \geq v(p)$, pour $j > 1$. Alors il existe $y \in A$ tel que $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ et $v(y) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Soit $a_j = f_j(\mathbf{x}^*)$, $f_j \in \mathscr{C}(V(\mathbb{Q}_p))$, et $U = \{\mathbf{x} \in V(\mathbb{Q}_p)\colon v(f_1(\mathbf{x})) = 0, v(f_j(\mathbf{x})) \geq v(p), j > 1\}$. Par hypothèse U est non vide, et pour tout $\mathbf{x} \in U$ il existe un seul et unique $y \in \mathbb{Q}_p$ tel que $y^n + f_1(\mathbf{x})y^{n-1} + \cdots + f_n(\mathbf{x}) = 0$ et $v(y) = 0$ (cf. lemme 1.11). Ceci définit une fonction $y\colon U \to \mathbb{Q}_p$, et on vérifie aisément que l'unicité en question et la compacité de $B(0,0)$ entraîne que y est continue. Comme U est un ouvert fermé on peut prolonger y en une fonction définie sur $V(\mathbb{Q}_p)$ tout entier, que nous notons aussi y. En raisonnant comme dans le lemme précédent on vérifie que $b = y(\mathbf{x}^*)$ est la racine cherchée. □

COROLLAIRE 3.12. *Si $\mathfrak{p}$ est maximal, alors $\mathscr{C}(V)/\mathfrak{p}$ est un corps p-adiquement clos.*

DÉMONSTRATION. L'anneau A est alors un sous-corps de ${}^*\mathbb{Q}_p$ et il hérite de la valuation p-adique induite. Par le lemme 3.11 A est hensélien pour cette valuation, et par le corollaire 3.10 son groupe de valuation est un $\mathbb{Z}$-groupe. □

Nous allons maintenant considérer le cas où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non maximal, et $V = C$ est une courbe. Par le lemme de normalisation de Noether, il existe $t \in \mathbb{Q}_p[C]$, transcendant sur $\mathbb{Q}_p$, tel que $\mathbb{Q}_p[C]$ est entier sur $\mathbb{Q}_p[t]$. Soit $f_j(t, X) \in \mathbb{Q}_p[t, X]$, unitaire en X, tel que $f_j(t, x_j) = 0$ et $f'_j(t, x_j) \neq 0$, et soit $t = h(x_1, \ldots, x_m)$. On peut alors décrire les points de $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[C]$ à l'aide de ceux de $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[t]$.

En effet, ces derniers correspondent aux 1-types sur $\mathbf{Q}_p$, et chaque type $\mathrm{tp}(t/\mathbf{Q}_p)$ (par abus de notation) permet d'isoler les racines de $f_j(t, X)$ à l'aide d'ouverts définissables. Un point de $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[C]$ peut donc être représenté par un $(m+1)$-uplet $(\mathrm{tp}(t/\mathbf{Q}_p), U_1(t, \mathbf{x}), \ldots, U_m(t, \mathbf{x}))$, où les U_j sont des ouverts définissables de $\mathbf{Q}_p$, à paramètre t, tel que U_j isole une racine ζ_j de $f_j(t, X)$ et $\boldsymbol{\zeta} \in C$, i.e. $F_1(\boldsymbol{\zeta}) = \cdots = F_k(\boldsymbol{\zeta}) = 0$.

LEMME 3.14. *L'espace* $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[C]$ *est un espace spectral normal, i.e. l'adhérence d'un point contient un seul et unique point fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha \in \mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[C]$, représenté par $(\mathrm{tp}(t/\mathbf{Q}_p), U_1, \ldots, U_m)$ comme ci-dessus. Réalisons $\mathrm{tp}(t/\mathbf{Q}_p)$ par $t^* \in {}^*\mathbf{Q}_p$, et $\mathbf{x}$ par $\mathbf{x}^* \in {}^*\mathbf{Q}_p$. Soit $B = \{x \in {}^*\mathbf{Q}_p\colon \exists a \in \mathbf{Q}_p,\ v(x) \geq v(a)\}$, i.e. l'ensemble des points de ${}^*\mathbf{Q}_p$ à distance finie (cf. la proposition 2.5), B est un anneau de valuation dont le corps résiduel est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Q}_p$. Notons w cette valuation. On a deux cas:

(i) $t^* \notin B$: comme $t^* = h(\mathbf{x}^*)$, $h \in B[X]$, il existe un j pour lequel $x_j^* \notin B$, i.e. $\mathbf{x}^*$ est "à l'infini" dans la direction x_j.

(ii) $t^* \in B$: comme $f_j(t^*, \mathbf{x}^*) = 0$, où $f_j(t^*, X) \in B[X]$ est unitaire, et B est intégralement clos, il s'ensuit que $x_j^* \in B$, pour tout j, i.e. $\mathbf{x}^*$ est "à distance finie".

Etant donné deux points α_1, α_2 qui relèvent respectivement des cas (i) et (ii), il est clair qu'on peut les séparer par des ouverts (cf. le corollaire 3.6). Si α relève du cas (ii), il existe a_i, $b \in \mathbf{Q}_p$ uniques tel que $w(x_i^* - a_i) > 0$ et $w(t^* - b) > 0$, et de plus on vérifie que $\mathbf{a} \in C(\mathbf{Q}_p)$. Soit $\alpha_{\mathbf{a}}$ le point de $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[C]$ induit de la facon évidente par $\mathbf{a}$. On vérifie sans peine que $\alpha_{\mathbf{a}} \in \mathrm{adh}\{\alpha\}$, que les seuls points fermés à distance finie sont les $\alpha_{\mathbf{a}}$, et que si $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$, alors $\alpha_{\mathbf{a}'} \notin \mathrm{adh}\{\alpha\}$. On a donc le résultat voulu pour tous les points à distance finie. Nous vérifions maintenant que les points à l'infini sont tous fermés. Si α relève du cas (i), alors $\mathrm{tp}(t^*/\mathbf{Q}_p)$ est déterminé par une suite d'ouverts $P_n^{\cdot}(e_n x)$, $n \geq 2$, $(e_n) \in \Delta$ (voir [B3, proposition 4.6(2)]). Soit α_1, α_2 deux points qui relèvent de (i), alors on a deux possibilités (avec les notations évidentes): ou bien $\mathrm{tp}(t_1^*/\mathbf{Q}_p) \neq \mathrm{tp}(t_2^*/\mathbf{Q}_p)$, et alors α_1, α_2 peuvent être séparés par des ouverts de la forme $P_n^{\cdot}(e_n h(\mathbf{x}))$, ou bien $\mathrm{tp}(t_1^*/\mathbf{Q}_p) = \mathrm{tp}(t_2^*/\mathbf{Q}_p)$, et alors α_1, α_2 peuvent être séparés par des ouverts qui isolent les racines des $f_j(t, X)$. Ainsi, tous ces points sont fermés. $\square$

COROLLAIRE 3.14. *Pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathscr{C}(C)$, *le quotient* $\mathscr{C}(C)/\mathfrak{p}$ *est un anneau local.*

DÉMONSTRATION. Le corollaire 3.14 découle immédiatement de la proposition 3.1. $\square$

Notons que pour des raisons inhérentes à la notion d'ordre, le spectre réel d'un anneau est toujours un espace spectral normal. Ceci a pour conséquence que, dans le cas réel, $\mathscr{C}(V)/\mathfrak{p}$ est toujours un anneau local.

Nous ramenons maintenant le cas d'une courbe à celui de la "droite p-adique", grâce à une "paramétrisation définissable".

PROPOSITION 3.15. *Soit* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C}(C))$, *un idéal premier non maximal, alors il existe* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p))$ *et un isomorphisme* $\mathscr{C}(C)/\mathfrak{p} \simeq \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)/\mathfrak{q}$.

DÉMONSTRATION. Soit α le point de $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[C]$ correspondant à $\mathfrak{p}$. Dans la notation de la discussion précédente, on a l'inclusion $\mathbf{Q}_p[t] \hookrightarrow \mathbf{Q}_p[C]$. Nous allons voir que le morphisme dual $\mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[C] \to \mathrm{Spec}_p\,\mathbf{Q}_p[t]$ nous donne $\mathfrak{q}$. Toujours dans la notation du lemme 3.13, considérons le diagramme suivant ($\mathfrak{p} = \ker \text{év}(\mathbf{x}^*)$):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}_p[C] \arrow[r, hook] & \mathscr{C}(C) \arrow[dr, "\text{év}(\mathbf{x}^*)"] & \\ & & {}^*\mathbb{Q}_p \\ \mathbb{Q}_p[t] \arrow[r, hook] \arrow[uu, hook] & \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p) \arrow[ur, "\text{év}(t^*)"'] & \end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que im év($\mathbf{x}^*$) = im év(t^*), et alors $\mathfrak{q} = \ker$ év(t^*) est l'idéal cherché.

(i) im év($\mathbf{x}^*$) $\supset$ im év(t^*): soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$, alors $f(t^*) = f(h(x^*)) = f \circ h(\mathbf{x}^*)$, et $f \circ h \in \mathscr{C}(C)$.

(ii) im év($\mathbf{x}^*$) $\subset$ im év(t^*): par notre analyse des points de $\mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[C]$, $\mathfrak{p}$ correspond au cas où il existe $a \in \mathbb{Q}_p$ et $\mathbf{x}_0 \in C(\mathbb{Q}_p)$ tels que $v(t^* - a) > \mathrm{val}\, \mathbb{Q}_p$ et $v(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0) > \mathrm{val}\, \mathbb{Q}_p$. Il existe des ouverts définissables $U_1(t, y), \ldots, U_m(t, y)$ (à paramètre t), déterminés par $\mathbf{x}^*$, tels que les conditions suivantes appartiennent à $\mathrm{tp}(t^*/\mathbb{Q}_p)$: $\exists! \zeta_1(t) \in U_1(t, y), \ldots, \zeta_m(t) \in U_m(t, y)$; $\bigwedge_j \zeta_j(t)$ est une racine simple de $f_j(t, Y)$; $f_j(t, Y)$ a exactement $\# j$ racines; $(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_m(t)) \in C$; $t = h(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_m(t))$; $a = h(\mathbf{x}_0)$; $\bigwedge_j f_j(a, x_{0j}) = 0$. Or $\mathrm{tp}(t^*/\mathbb{Q}_p)$ est axiomatisé par $v(t - a) > \mathrm{val}\, \mathbb{Q}_p$ et $P_n^{\cdot}(e_n(t - a))$, $n \geq 1$, pour certains $e_n \in \Delta_n$, tels que $(e_n) \in \Delta$. Par compacité, on peut supposer qu'il existe δ, $\gamma \in \mathrm{val}\, \mathbb{Q}_p$ et $n \in \mathbb{N}$, tels que les conditions ci-dessus sont vérifiées sur l'ouvert définissable $U = B(a, \delta) \cap P_n^{\cdot}(e_n(t - a))$, et $v(\boldsymbol{\zeta}(t) - \mathbf{x}_0) \geq \gamma$. Sur l'ouvert U, les $\zeta_j(t)$ fournissent des fonctions définissables telles que $(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_m(t)) \in C(\mathbb{Q}_p)$. Par le théorème des fonctions implicites, ces fonctions sont aussi continues. Soit $\boldsymbol{\zeta}$: $B(a, \delta) \to C(\mathbb{Q}_p)$ définie par $\boldsymbol{\zeta}(\tau) = (\zeta_1(\tau), \ldots, \zeta_m(\tau))$, si $\tau \in U$, et $\boldsymbol{\zeta}(\tau) = \mathbf{x}_0$, sinon. En raisonnant comme dans le lemme 3.13 (N.B.: $B(a, \delta) = \{a\} \cup \bigcup_{e \in \Delta_n} (B(a, \delta) \cap P_n^{\cdot}(e(\tau - a))))$, on montre que $\boldsymbol{\zeta}$ est une fonction continue définissable. Comme $B(a, \delta)$ est un ouvert fermé, $\boldsymbol{\zeta}$ se prolonge en une fonction continue défiinissable sur $\mathbb{Q}_p$ tout entier. Par l'axiomatisation de $\mathrm{tp}(t^*/\mathbb{Q}_p)$, il est clair qu'on a $\boldsymbol{\zeta}(t^*) = \mathbf{x}^*$. Ainsi, si $g \in \mathscr{C}(C)$, alors $f = g \circ \boldsymbol{\zeta} \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$ et $f(t^*) = g(\mathbf{x}^*)$. $\square$

Il ne reste plus donc qu'à analyser le cas de la droite affine p-adique. Soit $\mathbb{Q}_p[t]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée t, soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$ un idéal premier non maximal et $\alpha \in \mathrm{Spec}_p\, \mathbb{Q}_p[t]$, le point correspondant. Toujours dans la notation ci-dessus, on réalise le type correspondant à α par un élément $t^* \in {}^*\mathbb{Q}_p$. Comme on l'a vu, il existe un unique $t_0 \in \mathbb{Q}_p$ tel que $v(t^* - t_0) > \mathrm{val}\, \mathbb{Q}_p$, et $\mathfrak{p}$ est contenu dans l'idéal maximal $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p): f(t_0) = 0\}$. L'idéal maximal de $A = \{f(t^*): f \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)\}$ ($\simeq \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)/\mathfrak{p}$) consiste en $m_A = \{f(t^*) \in A: f(t_0) = 0\}$, et son corps résiduel k_A est isomorphe à $\{f(t_0): f \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)\} = \mathbb{Q}_p$.

LEMME 3.16. *A est un anneau de valuation.*

DÉMONSTRATION. Soit a, $b \in A$, il faut voir qu'il existe $c \in A$ tel que $a = cb$ ou $b = ca$. Il suffit de considérer a, $b \in m_A$. Soit donc $a = f(t^*) \neq 0$, $b = g(t^*) \neq 0$, f, $g \in \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$, tels que $f(t_0) = g(t_0) = 0$. Par un changement de variable adéquat on peut supposer $t_0 = 0$. Comme on l'a vu, le type de t^* au-dessus de $\mathbb{Q}_p$ est axiomatisé par les formules $v(t) > \mathrm{val}\, \mathbb{Q}_p$ et $P_n^{\cdot}(\rho_n t)$, $n \geq 2$, pour un certain $(\rho_n) \in \Delta$. Par le théorème 3.6 de [DV] (par exemple en utilisant des arguments de [SV]), on obtient les développements suivants en séries de Puiseux de f et g: il existe $n \geq 1$, $\gamma \in \operatorname{val} \mathbf{Q}_p$, a_i, $b_i \in \mathbf{Q}_p$ tels que les séries $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$, $\sum_{i \geq 0} b_i x^i$ convergent sur $B(0, \gamma)$, et pour $x \in B(0, \gamma) \setminus \{0\}$ on a $f(\rho_n x^n) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ et $g(\rho_n x^n) = \sum_{i \geq 0} b_i x^i$. On peut choisir γ tel que les séries $\sum a_i x^i$ et $\sum b_i x^i$ soient non nulles sur $B(0, \gamma) \setminus \{0\}$. Soit

$$\sum a_i x^i = a_N x^N (1 + \varepsilon_1(x)) \quad \text{et} \quad \sum b_i x^i = b_M x^M (1 + \varepsilon_2(x)),$$

où $a_N, b_M \neq 0$ et

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0 = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x).$$

Alors par exemple si $N \geq M$, on a

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(\rho_n z^n)}{g(\rho_n z^n)} = \lim_{z \to 0} a_N b_M^{-1} z^{N-M} \frac{(1 + \varepsilon_1(z))}{(1 + \varepsilon_2(z))} = q \in \mathbf{Q}_p.$$

Soit $\mathbf{Q}_p = \{0\} \mathbin{\dot\cup} e_1 P_n^{\cdot} \mathbin{\dot\cup} \cdots \mathbin{\dot\cup} e_{k(n)} P_n^{\cdot}$, $e_1 = 1$, $e_2 = \rho_n$, et h: $B(0, \gamma) \to \mathbf{Q}_p$ définie par $h(x) = f(x) g(x)^{-1}$, si $x \in \rho_n P_n^{\cdot}$; et $h(x) = q$, sinon. Pour montrer que h est continue il suffit de la considérer en 0. Soit $x_j \in B(0, \gamma)$ tels que $\lim_j x_j = 0$. On peut supposer que $x_j \in \rho_n P_n$, pour tout j. Comme précédemment (cf. le lemme 3.10), il existe une fonction ζ: $B(0, \gamma) \to \mathbf{Q}_p$ continue et définissable telle que $x_j = \rho_n \zeta(x_j)^n$, et donc $\lim_j \zeta(x_j) = 0$. Si j est assez grand, alors $\zeta(x_j) \in B(0, \gamma)$ et

$$h(x_j) = h(\rho_n \zeta(x_j)^n) = f(\rho_n \zeta(x_j)^n) g(\rho_n \zeta(x_j)^n)^{-1},$$

et ainsi $\lim_j h(x_j) = q = h(0)$. Comme $B(0, \gamma)$ est un ouvert fermé, h se prolonge en une fonction continue définissable sur $\mathbf{Q}_p$ tout entier. Par l'axiomatisation de $\operatorname{tp}(t^*/\mathbf{Q}_p)$, il est clair que $f(t^*) = h(t^*) g(t^*)$, d'où $c = h(t^*) \in A$ est l'élément cherché. □

LEMME 3.17. *Soit $a \in A$, inversible. Alors il existe $b \in A$ tel que $b^n = a$, si et seulement si $\bar{a} \in k_A^{\cdot n}$.*

DÉMONSTRATION. ($\Leftarrow$). Soit $a = f(t^*)$, $f \in \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)$. Par hypothèse $f(t_0) \neq 0$ et $f(t_0) \in \mathbf{Q}_p^{\cdot n}$. Par continuité de f et le fait que $\mathbf{Q}_p^{\cdot n}$ est ouvert, il existe $\gamma \in \operatorname{val} \mathbf{Q}_p$ tel que pour tout $x \in B(t_0, \gamma)$ on ait $f(x) \in \mathbf{Q}_p^{\cdot n}$. Procédant comme on l'a déjà fait, il existe $\zeta \in \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p)$ tel que $a = f(t^*) = (\zeta(t^*))^n$ et $\zeta(t^*) \in A$. □

PROPOSITION 3.18. *L'anneau A est un anneau intègre p-adiquement clos.*

DÉMONSTRATION. On a vu que A était un anneau de valuation et une $\mathbf{Q}$-algèbre. Comme $A \subset {}^*\mathbf{Q}_p$, il hérite d'une relation de divisibilité p-adique $D(x, y)$. Par les lemmes 3.9 et 3.17, et le fait que $k_A \simeq \mathbf{Q}_p \prec {}^*\mathbf{Q}_p$, la trace de $D(x, y)$ sur les éléments inversibles de A se relève du corps résiduel qui est p-adiquement clos. Ceci assure que A satisfait les axiomes (ii) de AIpC. Par le corollaire 3.10 et le lemme 3.11, les autres axiomes sont aussi vérifiés. □

Il est clair qu'on peut généraliser de façon appropriée les résultats de §§2 et 3 aux extensions finies de $\mathbf{Q}_p$.

RÉFÉRENCES

[B1] L. BÉLAIR, *Spectres p-adiques en rang fini*, ***Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Série 1: Mathématique***, vol. 305 (1987), pp. 1–4.

[B2] ———, *Spectre p-adique: aspects topologiques et géométriques*, ***Séminaire sur les structures algébriques ordonnées***. Vol. II (F. Delon et al., editors), Publications Mathématiques de l'Université Paris-VII, no. 33, Paris, 1990, pp. 151–163.

[B3] ———, *Le théorème de Macintyre, un théorème de Chevalley p-adique*, ***Annales des Sciences Mathématiques du Québec*** (à paraître).

[BS] L. Bröcker and J. H. Schinke, ***On the L-adic spectrum***, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster, ser. 2, vol. 40, Mathematisches Institut Universität Münster, Münster, 1986.

[CC] M. Carral and M. Coste, *Normal spectral spaces and their dimension*, ***Journal of Pure and Applied Algebra***, vol. 30 (1983), pp. 227–235.

[CD] G. Cherlin and M. Dickmann, *Real closed rings*. II, ***Annals of Pure and Applied Logic***, vol. 25 (1983), pp. 213–231.

[CR] M. Coste and M.-F. Roy, *La topologie du spectre réel*, ***Ordered fields and real algebraic geometry***, Contemporary Mathematics, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1982, pp. 27–59.

[De] F. Delon, ***Quelques propriétés des corps valués en théorie des modèles***, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris-VII, Paris, 1981.

[Dn] J. Denef, *The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety*, ***Inventiones Mathematicae***, vol. 77 (1984), pp. 1–23.

[DV] J. Denef and L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, ***Annals of Mathematics***, ser. 2, vol. 128 (1988), pp. 79–138.

[D1] M. Dickmann, ***Applications of model theory to real algebraic geometry***, en préparation.

[D2] ———, *A property of the continuous semialgebraic functions defined on a real curve*, manuscrit.

[Ho] M. Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, ***Transactions of the American Mathematical Society***, vol. 142 (1969), pp. 43–60.

[Jo] P. Johnstone, ***Stone spaces***, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[JR] A. Joyal and G. E. Reyes, *Separably real closed local rings*, ***Journal of Pure and Applied Algebra***, vol. 43 (1986), pp. 271–279.

[Ma] A. Macintyre, *Twenty years of p-adic model theory*, ***Logic Colloquium '84*** (J. Paris et al., editors), North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 121–153.

[Pi] A. Pillay, *Sheaves of continuous definable functions*, this Journal, vol. 53 (1988), pp. 1165–1169.

[PR] A. Prestel and P. Roquette, ***Formally p-adic fields***, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1050, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Re] G. E. Reyes, *Théorie des modèles et faisceaux*, ***Advances in Mathematics***, vol. 30 (1978), pp. 156–170.

[Ri] P. Ribenboim, ***Théorie des valuations***, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1964.

[R1] E. Robinson, *The p-adic spectrum*, ***Journal of Pure and Applied Algebra***, vol. 40 (1986), pp. 281–296.

[R2] ———, *The geometric theory of p-adic fields*, ***Journal of Algebra***, vol. 110 (1987), pp. 158–172.

[SV] P. Scowcroft and L. van den Dries, *On the structure of semialgebraic sets over p-adic fields*, this Journal, vol. 53 (1988), pp. 1138–1164.

[V1] L. van den Dries, *Remarks on Tarski's problem concerning* ($\mathbb{R}, +, \cdot, \exp$), ***Logic Colloquium '82*** (G. Lolli et al., editors), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97–121.

[V2] ———, *A specialization theorem for p-adic power series converging on the closed unit disc*, ***Journal of Algebra***, vol. 73 (1981), pp. 613–623.

[We] V. Weispfenning, *Quantifier elimination and decision procedure for valued fields*, ***Models and sets (Logic Colloquium '83)***, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1103, Springer-Verlag, Berlin, 1984, pp. 419–472.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
MONTRÉAL, QUÉBEC H3C 3P8, CANADA