

eXamen.press

eXamen.press ist eine Reihe, die Theorie und Praxis aus allen Bereichen der Informatik für die Hochschulausbildung vermittelt.

Hans-Joachim Bungartz · Stefan Zimmer
Martin Buchholz · Dirk Pflüger

Modellbildung und Simulation

Eine anwendungsorientierte Einführung

Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Dr. Stefan Zimmer
Dipl.-Inf. Martin Buchholz
Dipl.-Inf. Dirk Pflüger
Technische Universität München
Institut für Informatik
Boltzmannstr. 3
85748 Garching
bungartz@in.tum.de
zimmer@in.tum.de
buchholm@in.tum.de
pflueged@in.tum.de

ISBN 978-3-540-79809-5

e-ISBN 978-3-540-79810-1

DOI 10.1007/978-3-540-79810-1

eXamen.press ISSN 1614-5216

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2009 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk-sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwider-handlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk be-rechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: KinkelLopka, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort

In weiten Teilen der Wissenschaft, insbesondere in den Natur- und Ingenieurwissenschaften, haben sich Modellbildung und Simulation als dritte Säule des Erkenntniserwerbs etabliert: Wo früher das Verständnis, die Vorhersage oder die Optimierung des Verhaltens von Prozessen und Systemen auf Experimente oder theoretisch-analytische Untersuchungen angewiesen waren, bietet sich heute die elegante Möglichkeit von „Experimenten im Computer“. Längst sind auch neue Fachgebiete entstanden – sei es als Spezialisierungen innerhalb klassischer Fächer oder als eigenständige Gebiete zwischen bestehenden Fächern. Alle leben dabei von der transdisziplinären Interaktion effizienter Methoden (zumeist aus Mathematik oder Informatik) mit spannenden Anwendungsgebieten und Modellen, welche keinesfalls auf Natur- und Ingenieurwissenschaften beschränkt sind, wie etwa das Beispiel der Finanzmathematik belegt. Und so zeigen die unterschiedlichen Namen, die wir heute hierfür vorfinden, in erster Linie leicht unterschiedliche Schwerpunktsetzungen an: „Scientific Computing“ oder „Wissenschaftliches Rechnen“ betont mathematische Aspekte (insbesondere numerische), „High-Performance Computing (HPC)“ bzw. „Höchstleistungsrechnen“ sowie „Advanced Computing“ eher informatische, wobei bei Ersterem die Supercomputer im Fokus stehen, während Letzterem ein integraler und Algorithmen, Rechner, Daten und Software umfassender Ansatz zugrunde liegt. Bezeichnungen wie „Computational Sciences“, „Computational Science and Engineering“ oder „Computational Engineering“ rücken dagegen eher den Simulationsgegenstand ins Zentrum des Interesses.

Trotz des großen Spektrums an Anwendungsgebieten und trotz der hohen Bandbreite an eingesetzten Methodenapparaten – analytisch und approximativ, numerisch und diskret, deterministisch und stochastisch, der Mathematik entnommen (Differentialgleichungen etc.) oder aus der Informatik stammend (Fuzzy Logik, Petri-Netze etc.) – liegt doch dem Modellieren und Simulieren eine einheitliche Systematik zugrunde, der sich in zunehmenden Maße einschlägige Lehrveranstaltungen widmen. Das vorliegende Buch ist denn auch entstanden aus der Ausarbeitung von Vorlesungen „Grundlagen der Modellbildung und Simulation“ bzw. „Modellbildung und Simulation“, die die ers-

ten beiden Autoren mehrfach an der Universität Stuttgart sowie an der TU München gehalten haben. Primär im Informatik-Curriculum verankert, wenden sich beide Lehrveranstaltungen jedoch auch an Studierende der Mathematik sowie technischer und naturwissenschaftlicher Fächer. Ganz typisch und unvermeidlich dabei ist, dass praktisch jede Hörerin und jeder Hörer auf Bekanntes stoßen, zugleich aber auch mit Neuem konfrontiert werden. Durch die Fokussierung auf Modellbildung und Simulation als Methodik erscheint jedoch vermeintlich Vertrautes in neuem Licht, werden bisher verborgene Zusammenhänge aufgezeigt und wird das Auge darin geschult, neben dem konkreten Lösungsansatz auch die zugrunde liegende Systematik zu erkennen – eine wesentliche Intention des vorliegenden Buchs. Damit zusammenhängend und ganz wichtig: Es geht nicht um eine Einführung zum schlichten Umgang mit existierenden Werkzeugen, seien sie auch noch so verbreitet und mächtig, sondern vielmehr um einen Einstieg in die spannende Welt, bessere Werkzeuge bereitzustellen.

Einen Vollständigkeitsanspruch in Breite oder Tiefe zu erheben oder zu erwarten wäre angesichts der Vielschichtigkeit des Themas unsinnig. So streift das vorliegende Buch vielmehr einerseits einige interessante, relevante und in der konkret einzusetzenden Methodik durchaus sehr verschiedene Anwendungsgebiete, wobei die Auswahl hierbei natürlich auch mit persönlichen Vorlieben und Erfahrungen der Autoren zu tun hat. Andererseits sollen aber eben gerade die grundsätzlichen Gemeinsamkeiten in der Herangehensweise beleuchtet werden, die bei der Annäherung an die Thematik der Modellbildung und Simulation aus nur einer Anwendungsdomäne heraus sehr oft unsichtbar bleiben. Die Simulationspipeline von der Herleitung des Modells bis zu seiner Validierung ist hierfür ein prominentes Beispiel. Und so wird der immer wieder gegen derartige Lehrveranstaltungen und Buchkonzepte vorgebrachte Vorbehalt des „von allem etwas, aber nichts richtig“ ein Stück weit zur Maxime dieses Buchs. Es geht um eine erste Begegnung mit Modellen und Simulationen, darum, einen Eindruck zu gewinnen von der Vielfalt des eingesetzten mathematischen oder informatischen Rüstzeugs wie der Aufgabenstellungen. Wir werden über Strömungen reden, ohne dabei die Detailliertheit eines Buchs über Strömungssimulationen anstreben zu können oder zu wollen; es werden numerische Verfahren zur Sprache kommen, ohne dass jede Variante aufgezählt und in all ihren Eigenschaften beleuchtet wird, wie das von einem Numerik-Lehrbuch erwartet wird; und alle Szenarien werden stark vereinfacht werden, was natürlich auf Kosten der Realitätsnähe gehen muss. Wir wollen ja die Leser und Leserinnen dieses Buchs eben nicht zu Spezialisten in einem Teilbereich ausbilden, sondern Studierenden der Informatik, Mathematik oder natur- bzw. ingenieurwissenschaftlicher Fachrichtungen einen Überblick geben – und natürlich Lust auf mehr erwecken.

Eine weitere Herausforderung ist die Balance zwischen Modellierung und Simulation – hier im engeren Sinne des Worts, also des Teils der Berechnung oder Lösung der Modelle. So werden wir Modelle diskutieren, dabei aber weder Ursache noch Ziel der Modellierung – die Simulation – aus dem Auge verlie-

ren. Und wir werden Berechnungsverfahren besprechen, dabei aber nicht das Modell vom Himmel fallen lassen. Auch diese aus unserer Sicht wichtige Breite und Verzahnung muss auf Kosten der Tiefe in den Einzelbereichen gehen – aber dieses Buch ist eben weder ein Buch über mathematische Modellierung noch eines über Numerik.

Für die Strukturierung eines solchen Buchs gibt es mindestens zwei unterschiedliche Möglichkeiten. Man kann die eingesetzte Methodik zur obersten Gliederungsebene machen, was dann beispielsweise zu Kapiteln über Modelle mit Graphen, Modelle mit gewöhnlichen Differentialgleichungen oder Modelle mit partiellen Differentialgleichungen führt. Der Vorteil hierbei ist die methodische Stringenz, allerdings werden dann gewisse Themen wie die Verkehrssimulation mehrfach aufscheinen, was eine vergleichende Betrachtung und Bewertung alternativer Ansätze erschwert. Diesen Nachteil vermeidet eine Gliederung nach Themenfeldern, in denen modelliert und simuliert wird – mit den entsprechenden umgekehrt gelagerten Vor- und Nachteilen. Wir haben uns für die zweite Alternative entschieden, da uns die resultierende Struktur als gerade für den Einsteiger plausibler und attraktiver erscheint und zudem die wichtige Botschaft, dass es praktisch immer mehr als ein mögliches Modell, mehr als einen möglichen einzusetzenden mathematischen oder informatischen Apparat gibt, so besser transportiert werden kann.

Kapitel 1 führt in die Thematik der Modellbildung und Simulation ein. Zunächst werden die Simulationspipeline bzw. der Simulationszyklus vorgestellt. Anschließend werden allgemeine Fragen rund um mathematische Modelle – z. B. die Herleitung, die Analyse sowie Eigenschaften von Modellen, Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen oder Modellhierarchien und Modellreduktion betreffend – sowie rund um die simulative Umsetzung der Modelle diskutiert. Kapitel 2 stellt dann das im Folgenden benötigte methodische Instrumentarium aus den unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik und Informatik in kompakter Form bereit. Auch hier sind verschiedene Strategien denkbar – vom kompromisslosen (und Platz sparenden) „dies und das wird alles vorausgesetzt“ bis hin zum fürsorglichen (und den Rahmen eines Lehrbuchs sprengenden) „was gebraucht wird, wird erläutert“. Wir wählen den Zwischenweg einer knappen Rekapitulation aus Elementarmathematik, diskreter Mathematik, Linearer Algebra, Analysis, Stochastik und Statistik sowie Numerik. Somit wird alles Wesentliche genannt, aber ohne epische Breite. Die meisten Themen sollten ja, mehr oder weniger vertieft, Stoff des Grundstudiums bzw. des Bachelor-Studiums in den betreffenden Fachrichtungen sein. Es werden jedoch stets Quellen angegeben, mit deren Hilfe man eventuelle Lücken schnell und kompetent schließen kann. Zur Erleichterung der Zuordnung und zur Unterstützung eines selektiven Lesens dieses Buchs wird später zu Beginn der Anwendungsszenarien immer explizit auf das jeweils benötigte Instrumentarium verwiesen.

Die folgenden Kapitel behandeln dann, thematisch in vier Teile gruppiert, exemplarisch unterschiedliche Bereiche, in denen heute in starkem Umfang Modelle sowie modellbasierte Simulationen eingesetzt werden.

Teil I widmet sich der Thematik „Spielen – entscheiden – planen“. Dabei werden Aufgabenstellungen aus den Bereichen Spieltheorie (Kapitel 3), Entscheidungstheorie (Kapitel 4), Scheduling (Kapitel 5) sowie Finanzmathematik (Kapitel 6) diskutiert.

In Teil II werden Modellierung und Simulation im Bereich des Verkehrswesens behandelt – ein Gebiet, anhand dessen sehr schön die Vielfalt unterschiedlicher Aufgabenstellungen, Herangehensweisen und eingesetzter Instrumentarien dargelegt werden kann. Dabei wird zunächst die makroskopische Simulation von Straßenverkehr mittels einfacher auf Differentialgleichungen basierender Modelle vorgestellt (Kapitel 7). Auf zelluläre Automaten stützt sich dagegen die klassische mikroskopische Betrachtungsweise (Kapitel 8). Einen ganz anderen Ansatz stellt die stochastische Verkehrssimulation dar, bei der Wartesysteme das zentrale Beschreibungswerkzeug sind (Kapitel 9).

Teil III befasst sich mit Szenarien aus dem weiteren Umfeld dynamischer Systeme. Erste diesbezügliche Einblicke bietet der Klassiker Populationsdynamik (Kapitel 10). Am Beispiel der Regelungstechnik werden dann konventionelle Ansätze zur Regelung von technischen Systemen wie beispielsweise Mehrkörpersystemen sowie die Fuzzy-Regelung behandelt (Kapitel 11). Den Abschluss dieses Teils bildet ein kurzer Ausflug in die Welt des Chaos' (Kapitel 12).

Im abschließenden Teil IV werden dann Themen mit starkem Bezug zur Physik diskutiert – Themen, deren simulative Behandlung typischerweise sehr rechenintensiv ist und die somit enge Bezüge zum Hochleistungsrechnen aufweisen. Nach der Molekulardynamik als Vertreter von Partikelverfahren (Kapitel 13) werden mit der Wärmeleitung (Kapitel 14) und der Strömungsmechanik (Kapitel 15) zwei Vertreter von auf partiellen Differentialgleichungen basierenden Modellen behandelt. Dass auch die Informatik, genauer die Computergraphik, physikalisch motivierte Modelle und Simulationen verwendet, zeigt das abschließende Szenario der Modellierung und Berechnung realistischer globaler Beleuchtung (Kapitel 16).

Wie bereits erwähnt, eignet sich dieses Buch auch zur selektiven Behandlung in Lehrveranstaltungen bzw. zum selektiven Studium, falls nur ausgewählte Themen als relevant erscheinen. Gemeinsam mit dem einführenden Kapitel 1 sowie den jeweils erforderlichen Grundlagen aus Kapitel 2 bildet jeder Teil für sich eine abgeschlossene Einheit und kann auch so gelesen bzw. im Rahmen einer Lehrveranstaltung behandelt werden.

Wie immer haben viele zu diesem Buch beigetragen. Besonderen Dank schulden wir unseren Kollegen am Lehrstuhl – für kritische Anmerkungen, hilfreiche Hinweise oder die eine oder andere Abbildung – sowie den Hörerinnen und Hörern unserer eingangs genannten Lehrveranstaltungen, die mit ihren Fragen und Bemerkungen natürlich viel zur schlussendlichen Gestalt dieses Buchs beigetragen haben. Herrn Clemens Heine vom Springer-Verlag danken wir herzlich für den Denkanstoß, „etwas über Modellierung und Simulation ins Auge zu fassen“, sowie für die konstruktive Begleitung des Vorhabens in der Folgezeit, die sich – wie so oft – dann doch leider etwas in die Länge zog.

Überhaupt war die Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag einmal mehr sehr angenehm.

Garching
November 2008

H.-J. Bungartz
S. Zimmer
M. Buchholz
D. Pflüger

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Die Simulationspipeline	1
1.2	Einführung in die Modellierung	5
1.2.1	Allgemeines	5
1.2.2	Herleitung von Modellen	7
1.2.3	Analyse von Modellen	10
1.2.4	Klassifikation von Modellen	11
1.2.5	Skalen	12
1.3	Einführendes zur Simulation	14
1.3.1	Allgemeine Bemerkungen	14
1.3.2	Bewertung	15
2	Benötigtes Instrumentarium in Kurzform	19
2.1	Elementares und Diskretes	20
2.2	Kontinuierliches	21
2.2.1	Lineare Algebra	22
2.2.2	Analysis	23
2.2.3	Bedeutung für Modellbildung und Simulation	30
2.3	Stochastisches und Statistisches	30
2.3.1	Warum Zufall?	31
2.3.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	32
2.3.3	Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume	38
2.3.4	Asymptotik	41
2.3.5	Induktive Statistik	44
2.4	Numerisches	47
2.4.1	Grundlagen	48
2.4.2	Interpolation und Quadratur	52
2.4.3	Direkte Lösung linearer Gleichungssysteme	59
2.4.4	Iterationsverfahren	61
2.4.5	Gewöhnliche Differentialgleichungen	68
2.4.6	Partielle Differentialgleichungen	78

2.5	Bezüge Instrumentarium – Anwendungen	83
-----	--	----

Teil I Spielen – entscheiden – planen:
Ein Warm-up zur Modellierung

3	Spieltheorie	89
3.1	Spiele in strategischer Normalform	90
3.2	Spiele ohne Annahmen über den Gegner	92
3.3	Reaktionsabbildungen	93
3.4	Dominante Strategien	95
3.5	Nash-Gleichgewichte	96
3.6	Gemischte Strategien	97
3.7	Ausblick	99
4	Gruppenentscheidungen	101
4.1	Individualpräferenzen und Gruppenentscheidungen	102
4.2	Beispiele für Entscheidungsverfahren	105
4.3	Bedingungen an Auswahlfunktionen, Satz von Arrow	109
5	Zeitpläne	115
5.1	Prozess-Scheduling (deterministisch)	117
5.2	Prozess-Scheduling (stochastisch)	123
5.3	Job-Shop-Probleme	129
5.4	Weitere Zeitplanprobleme	134
6	Wiener-Prozesse	137
6.1	Vom Bernoulli-Experiment zur Normalverteilung	138
6.2	Normalverteilte Einflussgrößen	140
6.3	Wiener-Prozesse	141
6.4	Anwendung: Entwicklung von Geldanlagen	146

Teil II Verkehr auf Highways und Datenhighways:
Einmal durch die Simulationspipeline

7	Makroskopische Simulation von Straßenverkehr	155
7.1	Modellansatz	156
7.2	Homogene Verkehrsströmung	158
7.2.1	Ein erstes Ergebnis	158
7.2.2	Geschwindigkeit, Fluss und Dichte	159
7.2.3	Fundamentaldiagramm	160
7.2.4	Modellverfeinerungen	161
7.3	Inhomogene Verkehrsströmung	164
7.4	Simulation einer einfachen Ringstraße	166

7.4.1	Ein erster Versuch	166
7.4.2	Eine verbesserte Simulation	169
7.5	Signal- und Verkehrsgeschwindigkeit	171
7.6	Zusammenfassung und Ausblick	176
8	Mikroskopische Simulation von Straßenverkehr	179
8.1	Modellansatz	180
8.1.1	Zelluläre Automaten	180
8.1.2	Straßenverkehr	182
8.2	Eine erste Simulation	184
8.3	Stochastische Erweiterung: Trödelfaktor	186
8.3.1	Freier Verkehrsfluss	187
8.3.2	Höhere Dichten, Staus aus dem Nichts	188
8.3.3	Validierung und Kalibrierung: Fundamentaldiagramm	190
8.4	Modellierung von Verkehrsnetzen	195
8.4.1	Verkehrsgraph	195
8.4.2	Kreuzungen	197
8.4.3	Pläne und Vorhaben	201
8.5	Modellverfeinerungen	207
8.6	Zusammenfassung und Ausblick	210
9	Stochastische Verkehrssimulation	211
9.1	Modellansatz	213
9.2	Wartesysteme	214
9.2.1	Stochastische Prozesse	215
9.2.2	Klassifizierung elementarer Wartesysteme	221
9.2.3	Beispiele zur Kendall-Notation	223
9.2.4	Leistungskenngrößen und erste Ergebnisse	223
9.3	Warteschlangennetze	226
9.3.1	Parameter in Warteschlangennetzen	227
9.3.2	Asymptotische Analyse	228
9.4	Analyse und Simulation	230
9.4.1	Markov-Prozesse und Markov-Ketten	232
9.4.2	Wartesysteme	237
9.4.3	Warteschlangennetze	241
9.4.4	Simulation	243
9.5	Zusammenfassung und Ausblick	245

**Teil III Dynamische Systeme:
Ursache, Wirkung und Wechselwirkung**

10	Populationsdynamik	251
10.1	Modell von Malthus	252
10.2	Verfeinerte Ein-Spezies-Modelle	252
10.2.1	Lineares Modell mit Sättigung	253
10.2.2	Logistisches Wachstum	253
10.3	Zwei-Spezies-Modelle	256
10.4	Ein diskretes Ein-Spezies-Modell	261
11	Regelung	265
11.1	Regelungstechnische Grundlagen	266
11.1.1	Regelkreis	267
11.1.2	Beschreibung linearer dynamischer Systeme	268
11.1.3	Anforderungen an den Regler	268
11.1.4	PID-Regler	270
11.2	Exemplarische Modellierung eines Mehrkörpersystems	271
11.2.1	Linearisiertes Modell mit Impuls- und Drallsatz	272
11.2.2	Vollständiges Modell mit Lagrange-Gleichungen	276
11.2.3	Simulation des Pendels	280
11.3	Fuzzy-Mengenlehre	281
11.3.1	Zugehörigkeit zu Fuzzy-Mengen	281
11.3.2	Operationen mit Fuzzy-Mengen	284
11.3.3	Linguistische Variablen	286
11.3.4	Fuzzy-Logik	287
11.4	Regelbasiertes Fuzzy-System	290
11.4.1	Fuzzifizierung	292
11.4.2	Inferenz	292
11.4.3	Defuzzifizierung	293
11.4.4	Beispiel	294
11.5	Fuzzy-Regelung des invertierten Pendels	294
11.5.1	Parameter und Randbedingungen	295
11.5.2	Aufschwingen des Pendels	296
11.5.3	Stabilisieren des Pendels	298
11.6	Ausblick	299
12	Chaostheorie	301
12.1	Einleitung	302
12.2	Von der Ordnung zum Chaos	303
12.2.1	Logistische Abbildung und deren Fixpunkte	303
12.2.2	Numerische Untersuchung und Bifurkationen	305
12.2.3	Übergang ins Chaos	308
12.3	Seltsame Attraktoren	311

12.3.1	Selbstähnlichkeit und fraktale Dimension	312
12.3.2	Hénon-Abbildung	315
12.3.3	Allgemeine zweidimensionale quadratische Abbildung . .	316
12.4	Chaotisches Verhalten eines angetriebenen Pendels	319
12.4.1	Modell des Pendels	319
12.4.2	Diskretisierung	320
12.4.3	Zyklen und Attraktoren	321

Teil IV Physik im Rechner:
Aufbruch zum Zahlenfressen

13	Molekulardynamik	331
13.1	Modellierung von Molekülen und Wechselwirkungen	332
13.1.1	Fundamentale physikalische Kräfte	333
13.1.2	Potenziale für ungeladene Atome	333
13.1.3	Berechnung der auf ein Atom einwirkenden Kraft	338
13.2	Bewegungsgleichung und deren Lösung	338
13.2.1	Bewegungsgleichung	339
13.2.2	Euler-Verfahren	339
13.2.3	Velocity-Störmer-Verlet	340
13.2.4	Bemerkungen	341
13.3	Simulationsgebiet	342
13.3.1	NVT-Ensemble	343
13.3.2	Randbedingungen	344
13.4	Implementierung	344
13.4.1	Linked-Cells-Datenstruktur	345
13.5	Parallelisierung	348
13.6	Ausblick	350
14	Wärmeleitung	351
14.1	Herleitung der Wärmeleitungsgleichung	352
14.1.1	Anzahl an Dimensionen	354
14.2	Diskretisierung	355
14.2.1	3-Punkte-Stern	356
14.2.2	5-Punkte-Stern	358
14.2.3	Randbehandlung	360
14.3	Numerische Lösung der PDE	361
14.3.1	Einfache Relaxationsverfahren	361
14.3.2	Mehrgitterverfahren	363
15	Strömungsmechanik	369
15.1	Fluide und Strömungen	370
15.2	Mathematisches Modell	372
15.2.1	Navier-Stokes-Gleichungen	372

15.2.2	Anmerkungen zur Herleitung	374
15.3	Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen	375
15.3.1	Finite Differenzen	375
15.3.2	Behandlung der Ortsableitungen	376
15.3.3	Behandlung der Zeitableitungen	377
15.3.4	Behandlung der Randbedingungen	378
15.4	Numerische Lösung der diskretisierten Gleichungen	379
15.4.1	Zeitschritt	379
15.4.2	Ortsdiskrete Impulsgleichungen	381
15.4.3	Ortsdiskrete Poisson-Gleichung für den Druck	381
15.4.4	Zur Stabilität	381
15.5	Anwendungsbeispiel: Umströmung eines Hindernisses	382
15.6	Ausblick	384
15.6.1	Aufgabenstellungen und Modelle	384
15.6.2	Diskretisierungen	385
15.7	Anhang: Kleiner Exkurs zur Gittergenerierung	386
15.7.1	Strukturierte Gitter	387
15.7.2	Unstrukturierte Gitter	391
15.7.3	Ansätze zur Behandlung veränderlicher Geometrien	394
16	Globale Beleuchtung in der Computergraphik	397
16.1	Größen aus der Radiometrie	398
16.2	Die Rendering-Gleichung	400
16.3	Techniken zur Lösung der Rendering-Gleichung	403
16.3.1	Ray-Tracing	404
16.3.2	Path-Tracing	405
16.3.3	Weitere Ray-Tracing-Derivate	407
16.4	Das Radiosity-Verfahren	408
16.4.1	Grundprinzip	408
16.4.2	Berechnung der Formfaktoren	410
16.4.3	Lösung der Radiosity-Gleichung	412
16.4.4	Anmerkungen und Verbesserungen	414
	Abschließende Bemerkungen	417
	Literaturverzeichnis	419
	Sachverzeichnis	423